共立講座 21世紀の数学

21

リーマンゼータ函数と保型波動

本橋 洋一・著

刊行にあたって

基礎科学としての数学の重要性は近年ますます増えている．にもかかわらず理工系離れがすすんでいる．その根底には数学離れがある．高等学校の数学教育も新課程に移行し，大学における数学教育も多様化しつつある．

このような状況において渇望されているのは，多様なニーズにこたえる個性的な教科書である．われわれは，現在の数学体系を大胆に再構成した大学の教科書を模索した．旧来の理学部数学科が変貌しつつある現在，有機的なつながりのなかでこそ，多面的な理解や多様な目的にあわせた自由な選択が可能になると信ずる．

きたるべき時代 21 世紀へ向けて，この新しい構成の教科書「共立講座 21 世紀の数学」を世に問う．

編集委員

序

ここに述べたことは，B. Riemann が「素数を数え上げること」を自らに課したとき以来連綿と書き留められてきた物語の一端である．全編を読み解くための導入とされたい．

著述の機会を与えて下さった飯高茂教授，ならびに共立出版に深謝する．また，煩い無き日々を与えてくれた我が家族に感謝する．

平成 10 年盛夏　東京　駒込にて
著　　　者

読者諸氏へ

本書は「通読」を旨として書かれたことを念頭に置かれたい．各節への附記も本文と同等である．付随的な目的として計算練習もある故，読者自ら細部を埋めることも期待されている．記号等は議論の流れと共に導入され，その後断りなく自由に用いられる．勿論，一般的な記号も用いられるが，それらはここで定義されているもののみである．予備知識としては函数論，微分方程式論，整数論等の極く基礎的な部分を仮定している．特殊函数については多少の用意を必要とするが，例えば [8] [20] [21] を参照すれば足りるであろう．リーマンゼータ函数 $\zeta(s)$ そのものについては何ら予備知識を仮定していないが，[17] (1951 年版) は今だに基本文献であることを注意しておく．保型函数論についても予備知識を仮定していない．Maass–Roelcke–Selberg 理論への導入としても本書を利用できる様に構成してある．関連する作用素論は避け，変形と評価による古典解析の手法を採った．これも計算練習の一つと理解されたい．文献は誤りも含めて詳細な検討に耐えられたもののみを掲げた．巻末の文献 21 冊を基礎として先に進まれたい．論文については敢えて割愛した．本文中の人名と暦年をもとに検索できるであろう．

構成は次の通りである．「I 部」では素数分布を中心にすえて $\zeta(s)$ の基礎について述べた．あらゆる $\zeta(s)$ の議論において背景として用意されるべきと思われる数学的及び歴史的事実の集成である．素数分布論はここにまとめたものよりは勿論遥かに広大である．本文中でも注意した様に，算術級数についての素数分布論にこそ解析的整数論の心髄があるが，将来の機会に期したい．「II 部」にては Selberg, Kuznetsov の「跡公式」を展開した．議論はできる限り「初等的且つ自己完結」と

すべく心がけた．モジュラー群の場合のみを考察したが，導入としてもまた応用上も相当に足るものであろう.「III 部」は $\zeta(s)$ と実解析的尖点形式との直接の関係を素数分布論の思想の中で摘出してみたものである．なお，第 23–25 節を除き，II，III 部は合わせて [12] の主要部と大略一致する．

一般的に用いる記号をここにまとめておく．

A, ε	: これらは，出現の都度に値の異なる正の常数である．一般に ε は任意の小正数としてあつかわれる．
$\ll, O, o$	: Vinogradov の記法 $f \ll g$ は Landau の $f = O(g)$ と同一である．これらの記号を含む不等式はなんらかの常数，例えば A, ε 等，に関係するが，文脈でそれらを判断されたい．殆どの場合，常数間の従属性は重要ではない．
$s = \sigma + it$	: 複素変数として用いるが，例外もある．実数部分 σ もこの意味で現われるが，やはり例外がある．
p	: 第 I 部では一般に素数を表すが，他所ではこの限りではない．
$[x]$	: Gauss 記号．実数 x の整数部分である．
$\mu(n)$	: Möbius 函数．但し，$d\mu$ は「非ユークリッド」測度である．
$\Lambda(n)$	: von Mandold 函数．整数 n が素数 p の冪であるとき $\Lambda(n) = \log p$ であり，それ以外では 0 と定義される．
$\sigma_\alpha(n)$	: 整数 n の各約数の α 乗の和である．
$d_k(n)$	: 整数 n を k 個の整数因子の積で表す方法の個数である．特に，$d_2(n) = d(n)$ と書き，約数函数という．勿論，$\sigma_0(n) = d(n)$ である．
$c_l(n)$	: Ramanujan 和．
$\mathrm{li}\, x$	: 対数積分．
$e(x)$	: $e(x) = \exp(2\pi i x)$，指数函数．
$I_\nu, J_\nu, K_\nu, Y_\nu$	: Bessel 函数．
Γ	: Gamma 函数．

Γ	: モジュラー群. $SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ に同型である.
$\dfrac{f'}{f}(x)$	: 函数 $f(x)$ の対数微分.
$\displaystyle\int_{(\alpha)} \cdots ds$	: 垂直線 $\mathrm{Re}\, s = \alpha$ を積分路とする複素積分.

目　　次

第 I 部　リーマンゼータ函数の古典論

第 II 部　実解析的尖点形式のスペクトル理論

第 III 部 リーマンゼータ函数論の最近の展開

第 I 部

リーマンゼータ函数の古典論

—1—
算術等式と函数等式

リーマンゼータ函数は「和表現」

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad(\sigma>1)\tag{1.1}$$

と共に「素因数分解の一意性」と同値な「Euler 積表現」

$$\zeta(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\qquad(\sigma>1)\tag{1.2}$$

をもつ．以下の議論ではこれらから導かれる様々な算術的等式を必要とする．

【補題 1.1】

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}\qquad(\sigma>1),\tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\qquad(\sigma>1),\tag{1.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n^s}=\zeta^k(s)\qquad(k=1,2,3,\cdots;\ \sigma>1),\tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}=\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\qquad(\sigma>\max\{1,1+\operatorname{Re}\alpha\}),\tag{1.6}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{c_l(n)}{l^s}=\frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)}\qquad(\sigma>1),\tag{1.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_\alpha(n)\sigma_\beta(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)\zeta(s-\beta)\zeta(s-\alpha-\beta)}{\zeta(2s-\alpha-\beta)}\tag{1.8}$$

$$\bigl(\sigma>\max\{1,1+\operatorname{Re}\alpha,\ 1+\operatorname{Re}\beta,\ 1+\operatorname{Re}(\alpha+\beta)\}\bigr).$$

証明 等式 (1.3) と (1.4) は (1.2) から，また，等式 (1.5) と (1.6) は (1.1) から直ちに従う．等式 (1.7) については， Ramanujan 和の定義から

$$\sum_{l|k} c_l(n) = \sum_{h=1}^{k} e(nh/k) = \begin{cases} k & (k \mid n), \\ 0 & (k \nmid n) \end{cases} \tag{1.9}$$

であることに注意する．この両辺に k^{-s} を乗じて和をとり，(1.7) を得る．次に，(1.8) の左辺は，$[f,g]$，(f,g) を整数 f,g の最小公倍数，最大公約数として，

$$\begin{aligned}\sum_{n} n^{-s} \sum_{f|n} \sum_{g|n} f^{\alpha} g^{\beta} &= \sum_{f} \sum_{g} f^{\alpha} g^{\beta} \sum_{[f,g]|n} n^{-s} \\ &= \zeta(s) \sum_{f} \sum_{g} f^{\alpha-s} g^{\beta-s} (f,g)^{s}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

ここで，函数

$$\phi_s(n) = n^s \prod_{p|n} (1 - p^{-s})$$

を導入し，

$$\sum_{d|n} \phi_s(d) = n^s \tag{1.11}$$

に注意する．即ち，(1.10) の最後の二重和は

$$\begin{aligned}\sum_{f} \sum_{g} f^{\alpha-s} g^{\beta-s} \sum_{d|(f,g)} \phi_s(d) &= \zeta(s-\alpha)\zeta(s-\beta) \sum_{d} \phi_s(d) d^{\alpha+\beta-2s} \\ &= \zeta(s-\alpha)\zeta(s-\beta) \prod_{p} \left(1 + (1-p^{-s}) \sum_{j=1}^{\infty} p^{(\alpha+\beta-s)j}\right)\end{aligned}$$

と書ける．これらをまとめて，(1.8) を得る．

Euler 積表示の簡単な応用として次の有用な評価を示しておく．

【補題 1.2】 任意の固定された整数 $k, l \geq 1$ について

$$\sum_{n \leq x} d_k(n)^l \ll x (\log x)^{k^l - 1} \qquad (x \geq 2). \tag{1.12}$$

証明　先ず，$d_k(n) = \sum_{f|n} d_{k-1}(f)$ に注意して，k についての帰納法を用いれば容易に

$$\sum_{n \le x} d_k(n) \ll x(\log x)^{k-1}.$$

次に，函数

$$q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)^l}{n^s} \qquad (\sigma > 1)$$

を考える．係数の乗法性から，

$$\begin{aligned} q(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{k^l}{p^s} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{d_k(p^j)^l}{p^{js}}\right) \\ &= \zeta(s)^{k^l} q_1(s). \end{aligned}$$

因子 $q_1(s)$ は $\sigma > \frac{1}{2}$ で絶対収束する表示

$$q_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

をもつ．ここで乗法的函数 $h(n)$ を具体的に書き下すまでもなく，これらより

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} d_k(n)^l &= \sum_{n \le x} \sum_{f|n} h(f) d_{k^l}(n/f) \\ &\ll x \sum_{f \le x} \frac{|h(f)|}{f} (\log x/f)^{k^l - 1} \ll x(\log x)^{k^l - 1}. \end{aligned}$$

一方，次の定理により (1.3)–(1.8) の左辺は全て，全複素平面に有理型函数として接続できる．

【定理 1.1】　函数 $\zeta(s)$ は全複素平面に解析接続可能である．その結果として$\zeta(s)$ は点 $s = 1$ における極以外では正則である．この極の近傍では漸近式

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + c_E + O(|s-1|) \tag{1.13}$$

が成立する．ここに c_E は Euler 常数である．更に，任意の s について函数等式

$$\zeta(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))}\zeta(s) \tag{1.14}$$

$$= 2^{1-s}\pi^{-s}\cos(\tfrac{1}{2}s\pi)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.15}$$

が成立する．

証明　定義式 (1.1) を

$$\zeta(s) = \int_{1-0}^{\infty} x^{-s} d[x] \qquad (\sigma > 1) \tag{1.16}$$

と書く．函数 $\rho(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$ を用いて，部分積分を行えば，解析接続

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^{\infty} \rho(x) x^{-s-1} dx \qquad (\sigma > -1) \tag{1.17}$$

を得る．函数 $\rho(x)$ の積分は有界である故，領域 $\sigma > -1$ までの接続が得られたのである．更に部分積分を繰り返す，つまり Euler–Maclaurin の展開法を適用すれば，全複素平面への接続が得られる．特に，

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{2} + \lim_{N\to\infty}\int_1^N \rho(x)x^{-2}dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right) = c_E\,.$$

これより (1.13) を得る．

函数等式の証明に移る．先ず，Γ-函数の倍角公式

$$\Gamma(2s) = \pi^{-\frac{1}{2}}2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) \tag{1.18}$$

を用いれば (1.14) と (1.15) とは互いに他から導き得る．そこで，(1.14) のみを示す．このために，函数

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-n^2\pi x) \qquad (x > 0) \tag{1.19}$$

の変換公式

$$\vartheta(x) = x^{-\frac{1}{2}}\vartheta(1/x) \tag{1.20}$$

に注意する．実際，Poisson 和公式によって，

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\pi n\xi i - \pi x\xi^2)d\xi = x^{-\frac{1}{2}}\vartheta(1/x). \tag{1.21}$$

一方，

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\vartheta(x)-1)x^{\frac{1}{2}s-1}dx = \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s) \qquad (\sigma > 1) \tag{1.22}$$

である．ここで項別積分が行われているが，絶対収束性によって，正当化される．積分を $x = 1$ で分割し，$0 < x < 1$ に対応する部分において $x \mapsto 1/x$ と変数変換し，更に，(1.20) を用いる．こうして，(1.22) は

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(x^{\frac{1}{2}s} + x^{\frac{1}{2}(1-s)})(\vartheta(x)-1)\frac{dx}{x} \tag{1.23}$$

と変形される．この積分は全ての $s \in \mathbb{C}$ に対して収束し整函数を表示する故，直ちに (1.14) を得る．

上記 (1.21) で，Poisson 和公式を応用したが，公式そのものについて述べておく．

【補題 1.3】　函数 $f(x)$ は有界区間 $[a, b]$ で連続的に微分可能であると仮定する．このとき

$$\sideset{}{'}\sum_{a\le n\le b} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_a^b f(x)e(nx)dx. \tag{1.24}$$

但し，$\sum'$ は，$a \in \mathbb{Z}$ の場合には $f(a)$ の代わりに $\frac{1}{2}f(a)$ を加え，$b \in \mathbb{Z}$ の場合も同様にすることを意味する．

証明　部分積分によって，

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} f(n) &= \int_{a+0}^{b} f(x)d[x] \\ &= \int_a^b f(x)dx + f(b)\rho(b) - f(a)\rho(a) - \int_a^b f'(x)\rho(x)dx.\end{aligned}$$

但し，$\rho(x)$ は上記の通りである．一方

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n} \qquad (n \notin \mathbb{Z}) \tag{1.25}$$

であるが，右辺 $\rho^*(x)$ は有界収束している故，

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\rho(x)dx &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(2n\pi x)dx \\ &= f(b)\rho^*(b) - f(a)\rho^*(a) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(x)\cos(2n\pi x)dx.\end{aligned}$$

これらを組み合わせ，且つ $\rho(x)-\rho^*(x)$ は x が整数であれば $\frac{1}{2}$ に等しく，その他では 0 に等しいことに注意して (1.24) を得る．なお，無限区間の場合は，(1.24) の両辺で極限をとればよい．

[附記] 補題 1.1 及び定理 1.1 に関しては各々 [17, 第 1，2 章] を見よ．Ramanujan 等式 (1.7)，(1.8) は後に重要な役割を果たす．函数等式に対して Riemann は少なくとも三種の証明を行っている ([17, 第 2 章])．それらはいずれも含蓄に富む．上記の証明はその内の一つであるが，保型形式 $\vartheta(x)$ の Mellin 変換として $\zeta(s)$ を捕えるものであり，いわゆる Hecke 対応の原形である．変換公式 (1.21) の別証明が [21, p. 124] にある．これは，Riemann による函数等式の第 3 証明（Riemann–Siegel 公式 [17, p. 25] [11]）と関係がある．Dirichlet 級数や Fourier 級数の一般論は必要としないが，各々[18, 第 9, 13 章] を見よ．

—2—
Riemann

函数等式から $\zeta(s)$ の零点についての情報を読みとってみよう．このために，

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s) \tag{2.1}$$

とおく．Euler 積 (1.2) の絶対収束性から，$\zeta(s)$ は半平面 $\sigma > 1$ で零点をもたない．また，表示

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{c_E s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n} \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{2.2}$$

により，$\Gamma(s)$ は全く零点をもたないことが解る．従って，$\xi(s)$ は半平面 $\sigma > 1$ で正則であり且つ零点をもたない． 一方，(1.14) は等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$ と同義である．従って，$\xi(s)$ は，

$$0 \le \sigma \le 1 \qquad (\text{臨界帯}) \tag{2.3}$$

の外部で正則であり且つ零点をもたない．また，臨界帯においては (1.23) を参照して $\xi(s)$ は正則であることが解る．即ち，$\xi(s)$ は整函数であり，零点をもつとすれば，それは臨界帯に限られ，しかもそれら全ては $\zeta(s)$ の零点でもある．逆に，臨界帯に入る $\zeta(s)$ の零点は全て $\xi(s)$ の零点である．函数 $\zeta(s)$ のこの他の零点は，ここに挙げた $\xi(s)$ の性質から，$\Gamma(\frac{1}{2}s)$ の $\sigma < 0$ における極に一致する．即ち

$$s = -2m \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{2.4}$$

に限り，全て単根である．以下，これらを $\zeta(s)$ の「自明な零点」という．他方，臨界帯に入る零点を「複素零点」といい，それらを一般的に

$$\rho = \beta + i\gamma \tag{2.5}$$

と書くこととする．勿論，$\overline{\rho}, 1-\rho, 1-\overline{\rho}$ も複素零点である．また，$\gamma \neq 0$ であることを注意しておく．実際，

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} > 0 \qquad (s > 0) \tag{2.6}$$

より

$$\zeta(s) < 0 \qquad (0 < s < 1). \tag{2.7}$$

では，複素零点は臨界帯においてどの様に分布しているのであろうか．今後の議論は全てこの疑問を中心として展開されるが，それは素数分布論を一定の範囲内で論じるのと実は同義である．素数分布と $\zeta(s)$ の零点との関係は Riemann による深遠な研究によって初めて認識された．彼の報文 (1859) の表題「与えられた限界以下の素数の個数について」(*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*) を読者諸氏は心に刻まれたい．概容は次の通りである．

第 1 節で示した様に，$\zeta(s)$ を複素平面全体へ解析接続し，函数等式を証明し，更に零点に関する上記の観察を行う．そして，Riemann は以下の予想を述べる．

(1) 複素零点 ρ は無限に存在し，

(2) 臨界帯の $0 < t \leq T$ なる部分に入るそれらの個数を $N(T)$ とすれば

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \qquad (T \geq 2). \tag{2.8}$$

(3) 常数 a, b が存在して，

$$\xi(s) = e^{a+bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho} \qquad (s \in \mathbb{C}). \tag{2.9}$$

(4) 函数

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n) \tag{2.10}$$

について，

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) \qquad (x > 1). \tag{2.11}$$

(5) 全ての ρ について,「恐らく」(*sehr wahrscheinlich*)

$$\mathrm{Re}\,\rho = \tfrac{1}{2}.$$

勿論，上記は今日の表記に従って書き直したものである．また，(4) については無限和の意味を解釈する必要があるが，ここでは度外視する．容易に

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{d\psi(\xi)}{\log\xi} + O(x^{\frac{1}{2}}) \qquad (x \geq 2). \tag{2.12}$$

従って，$\psi(x)$ と $\pi(x)$ とは素数の漸近分布上は殆ど同義である．

Riemann は素数分布自体について何一つ証明した訳ではない．しかし，彼は素数分布論と複素函数論とを明確に連結し，理論の枠組と発展の方向とを決定的に定めた．しかも，この枠組みの背後には，彼が描いた幾何学と解析学の融合した世界が広がっているのである．いずれその一端を垣間見ることになるであろう．

[附記] Riemann の報文を巡る歴史上の委細は Siegel (1932) によって一部明らかにされた．函数等式の Riemann による第 2 証明 ([17, p. 18]) は，彼が如何にして予想 (5) に導かれたかを知る手掛かりと思われる．Siegel が復原して示した様に，Riemann はこの証明を変形し「近似函数等式」を得ている．それは「鞍点法」の見事な応用であり $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ の高精度数値計算を可能とするものであった．その様にして Riemann は実際に複素零点の幾つかを求めていたのである．Siegel も記した如く，彼は決して壮大な一般論から予想 (5) に想到したのではない．しかし，彼の遺稿を見るとき，やはりその天才の大きさに圧倒される．なお，近似函数等式については [17, 第 6 章] [5, 第 4 章] [11] を見よ．更に，Riemann 以前の素数分布論については [13] に詳しい．彼は，Tchebychev の研究 (1851/52) から重要な示唆を得ていた．函数 $\pi(x)$ の考察に $\zeta(s)$ を援用したのは Tchebychev が最初である．

— 3 —
Hadamard

上記の予想 (1)–(3) を証明しよう．

先ず，Stirling 公式

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\exp((s-\tfrac{1}{2})\log s-s)(1+O(|s|^{-1}))\qquad(|\mathrm{Im}\log s|<\pi)\qquad(3.1)$$

に注意する．表示 (1.17) より $\zeta(s)=O(|s|)$ $(\sigma\geq\frac{1}{2})$ であるから $\xi(s)=O(\exp(A|s|\log|s|))$ となる．また，$\zeta(s)\to 1$ $(\sigma\to+\infty)$ でもある故，この評価は本質的

に最良なものである．従って,「Hadamard の因数分解定理」により，(2.9) 及び

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} = +\infty \tag{3.2}$$

を得る．つまり予想 (1) と (3) の証明を得た．

以後特に必要とはしないが，(2.9) における常数 a, b を定めておこう．先ず，(1.17) より

$$\zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \tag{3.3}$$

であるから

$$a = -\log 2. \tag{3.4}$$

次に，(2.1) 及び (2.9) の右辺の対数微分をとり，

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{2}\log\pi + b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}s+1) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{3.5}$$

を得る．これより，

$$b = -1 - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1).$$

一方，(1.15) から

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) = -\log(2\pi) - \frac{1}{2}\pi\tan(\tfrac{1}{2}\pi s) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \tag{3.6}$$

である故，

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log(2\pi) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) - \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1}\right).$$

しかるに，(1.13) により，この極限は c_E である．これらをまとめて，

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log(2\pi), \tag{3.7}$$

$$b = \tfrac{1}{2}\log(4\pi) - 1 - \tfrac{1}{2}c_E \tag{3.8}$$

を得る．

表示 (3.5) は重要である．ここでは，複素零点の分布について，幾つかの帰結を

そこから導こう．先ず複素零点の水平分布を考察する．このために，(3.5) においで $s=\sigma+it$ $(\sigma>1,\ t\geq 2)$ とし，

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(s)<A\log t-\sum_{\rho}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) \tag{3.9}$$

に注意する．この無限和の各項は正である故，

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)<A\log t. \tag{3.10}$$

また，t がある $\rho=\beta+i\gamma$ の虚部に一致している場合は，

$$-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma)<A\log\gamma-\frac{1}{\sigma-\beta} \tag{3.11}$$

も得られる．しかるに，任意の $\sigma>1,\ t\in\mathbb{R}$ について，

$$-3\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)-4\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)-\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\geq 0 \tag{3.12}$$

である．実際，(1.4) より左辺は

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)(1+\cos(t\log n))^2 n^{-\sigma} \tag{3.13}$$

に等しい．これら三不等式より

$$\frac{4}{\sigma-\beta}<\frac{3}{\sigma-1}+A\log\gamma.$$

つまり，

$$\beta<1-(\sigma-1)\frac{1-A(\sigma-1)\log\gamma}{3+A(\sigma-1)\log\gamma}.$$

充分小さな $c>0$ について $\sigma=1+c(\log\gamma)^{-1}$ と置き，次の結果を得る．

【定理 3.1】 ある絶対常数 $A>0$ が存在し，

$$\zeta(\sigma+it)\neq 0 \qquad \left(\sigma>1-A(\log(|t|+2))^{-1},\ t\in\mathbb{R}\right). \tag{3.14}$$

函数 $N(T)$ を考察しよう．仮定

$$\zeta(\sigma+iT)\neq 0 \qquad (\sigma\in\mathbb{R}) \tag{3.15}$$

のもとに，

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{D}\arg\xi(s)$$

である．但し，D は s が，頂点 $2, 2+iT, -1+iT, -1$ なる長方形の周上を正方向に一周するときの「連続的」変化を示す．底辺上では $\xi(s)$ は実数であり，既に述べた様に 0 とはならない故，$\arg\xi(s)$ は変化しない．また，点 $\frac{1}{2}+iT$ から点 -1 までの変化は，点 2 から点 $\frac{1}{2}+iT$ までのそれに等しい．何故ならば，函数等式により $\xi(\sigma+it)=\overline{\xi(1-\sigma+it)}$ が成立するからである．そこで，点 2 から点 $\frac{1}{2}+iT$ までの部分変化を D^* で表せば，

$$N(T)=\frac{1}{\pi}\mathrm{D}^*\arg\xi(s).$$

よって (3.1) に注意して

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+S(T)+O(T^{-1}) \tag{3.16}$$

を得る．但し，

$$S(T)=\frac{1}{\pi}\mathrm{D}^*\arg\zeta(s)$$

と置いた．しかるに，任意の $a>2$ について，頂点 $2, 2+iT, a+iT, a$ なる長方形の周上における $\arg\zeta(s)$ の変化は 0 である故，

$$S(T)=\frac{1}{\pi}\arg\zeta(\tfrac{1}{2}+iT) \tag{3.17}$$

を得る．この偏角は，仮定 (3.15) のもとに，値 0 から出発して，$\mathrm{Im}\,s=T$ なる水平線上を $+\infty$ 方向から点 $\frac{1}{2}+iT$ まで辿るときの，連続的変動の結果である．

そこで，$S(T)$ の評価を行わねばならないが，そのために次の二つの事実が必要となる．任意の $T\geq 2$ について

$$N(T+1)-N(T)<A\log T. \tag{3.18}$$

また，仮定 (3.15) のもとに

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT)=\sum_{\substack{\rho\\|T-\gamma|<1}}\frac{1}{\sigma+iT-\rho}+O(\log T)\qquad(-1<\sigma\le 2).\tag{3.19}$$

先ず，(3.9) で $s=2+iT$ とし，容易に

$$\sum_{\rho}\frac{1}{1+(\gamma-T)^2}=O(\log T)$$

を得る．これより (3.18) が直ちに従う．次に，仮定 (3.15) のもとに，(3.5) において $s=\sigma+iT$ 及び $s=2+iT$ として，それらの差を求め，

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT)=O(\log T)+\sum_{\substack{\rho\\|T-\gamma|<1}}\frac{1}{\sigma+iT-\rho}$$
$$-\sum_{\substack{\rho\\|T-\gamma|<1}}\frac{1}{2+iT-\rho}+\sum_{\substack{\rho\\|T-\gamma|\ge 1}}\frac{2-\sigma}{(\sigma+iT-\rho)(2+iT-\rho)}.$$

後の二つの和に (3.18) を応用し (3.19) を得る．

更に，後の目的も含めて，$\zeta(s)$ の対数の意味を定めておく．Euler 積 (1.2) から，

$$\log\zeta(s)=\sum_{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu p^{\nu s}}\qquad(\sigma>1)\tag{3.20}$$

と定義するのが当然であるが，半平面 $\sigma\le 1$ においては，慎重に議論せねばならない．そこで，(3.20) を

$$\log\zeta(s)=\int_{+\infty}^{\sigma}\frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha+it)d\alpha\tag{3.21}$$

と書き直し，逆にこれを $\log\zeta(s)$ の定義とする．即ち，点 s を含む水平線に沿って $+\infty$ 方向から s まで積分を行うが，「その間に $(\zeta'/\zeta)(\alpha+it)$ の特異点に遭遇しない限りにおいて」(3.21) の右辺にて $\log\zeta(s)$ の値とする．これは，全複素平面から，点 $s=1$ 及び $\zeta(s)$ の各零点を出発して $-\infty$ 方向に向かう半直線を全てとり去った領域に (3.20) の右辺を解析接続したものに他ならない．この限りにおいて，$\log\zeta(s)$ は一価函数である．勿論，これらのとり除かれた半直線上の s についても

$\log\zeta(s)$ を考察できるが，それはあくまでも上記の領域から解析接続した結果として現われる多価性を考慮して扱わねばならない．

さて，$S(T)$ の評価に戻り，仮定 (3.15) のもとに

$$S(T) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\log\zeta(\tfrac{1}{2}+iT) \tag{3.22}$$

であることを注意する．そこで，(3.21) において，$\sigma=\frac{1}{2}, t=T$ とし，$2<\alpha<\infty$ では自明な評価，また $\frac{1}{2}\le\alpha\le 2$ では (3.19) を用い，更に (3.18) に注意して，

$$S(T) = O(\log T) \tag{3.23}$$

を得る．これを (3.16) に挿入し予想 (2) の証明を終わる．

[附記] Stirling 公式を始めとする Γ-函数一般については [8] [21] を見よ．整函数の大域理論は Riemann の予想 (1)–(5) を念頭において Hadamard によって創始されたものである．例えば，[18] を見よ．しかし，現在では整函数論を特に必要とはしない (第 9 節を参照)．上記では伝統的な面も考慮に入れて論じてみた．着想 (3.12) は Mertens (1898) による．定理 3.1 は de la Vallée Poussin (1898) による．函数 $S(T)$ について詳しくは [17, 第 9, 14 章] を見よ．

—4—
素 数 定 理

次に，予想 (4) の証明を行う．

先ず，伝統的な手法である「Perron の近似式」を示す．仮定 $a>0, T\ge 2$ のもとに一様に

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} y^s\frac{ds}{s} = \begin{cases} 1+O\left(\dfrac{y^a}{T\log y}\right) & (y>1), \\ O\left(\dfrac{y^a}{T|\log y|}\right) & (0<y<1). \end{cases} \tag{4.1}$$

実際，$y > 1$ の場合，積分路を $-\infty$ 方向に平行移動すれば，問題は二つの半直線 $(-\infty \pm iT, a \pm iT]$ 上での積分の評価に帰着するが，それは部分積分を用いれば容易である．残りの場合は積分路を $+\infty$ 方向に平行移動すればよい．

定義 (2.10) に戻り，(4.1) において，$y = x/n$, $x = [x] + \frac{1}{2}$ とし，$a > 1$ を任意にとる．両辺に $\Lambda(n)$ を乗じて n につき和をとれば，絶対収束性と (1.4) により，

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^a}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^a |\log x/n|}\right) \tag{4.2}$$

を得る．残余項に含まれる和において，$n \le \frac{1}{2}x$ 及び $n \ge 2x$ に対応する部分は明らかに $O(|(\zeta'/\zeta)(a)|)$ である．また，残りの部分は $|\log(x/n)|^{-1} = O(n/|x-n|)$ を用いて評価する．即ち，

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^a}{T}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(a)\right| + \frac{x}{T}(\log x)^2\right) \tag{4.3}$$

を得る．

ここで，次の二つの事実に注意する．自明な零点の近傍を除けば，

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\log|s|) \qquad (\sigma \le -1). \tag{4.4}$$

また，任意の $T \ge 2$ について，$T \le T_0 \le T+1$,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_0) = O(\log^2 T) \qquad (-1 < \sigma \le 2) \tag{4.5}$$

となる T_0 が存在する． 実際，(4.4) は (3.6) から，(4.5) は (3.18) 及び (3.19) から容易に得られる．

そこで，(4.3) において $T = T_0$, $a = 1 + (\log x)^{-1}$ とし，正奇数 U につき，積分路を $\sigma = -U$ 上に平行移動する．表示 (3.5) 及び (4.4)–(4.5) を用いて，

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T_0}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \sum_{m < U/2} \frac{x^{-2m}}{2m}$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{-U-iT_0}^{-U+iT_0} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x}{T}(\log xT)^2\right)$$

を得る．この積分は $U \to +\infty$ のとき 0 に収束する故，(3.7) 及び (3.18) に留意し

て，次の基本的な結論に達する．

【定理 4.1】 条件 $x=[x]+\frac{1}{2}$ のもとに，任意の $T \geq 2$ について

$$\psi(x)=x-\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^{\rho}}{\rho}-\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log(1-x^{-2})+O\left(\frac{x}{T}(\log xT)^{2}\right). \tag{4.6}$$

実際上は，変数 x に対する上記条件は何ら束縛とはならない．また，右辺の第 3，4 項もあまり意味のあるものではない．しかしながら，$T \to \infty$ なる状態を考察する場合には，これらは具体的な意味をもつ．即ち，

$$\psi(x)=x-\lim_{T\to\infty}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^{\rho}}{\rho}-\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) \tag{4.7}$$

は x が整数に，あるはより詳しく，何らかの素数の冪に一致しない場合のみに成立する．函数 $\psi(x)$ は後者の様な x において不連続である故，これは当然に必要となる条件である．実は，x が正整数の場合に定義 (2.10) において和の終項を $\frac{1}{2}\Lambda(x)$ に置き換えれば，(4.7) は全ての $x>1$ について成立する．しかし，本論から離れた論点であるので詳細は割愛する．勿論，(4.7) にこれら注意を加えた上で，予想 (4) の証明を得たこととなる．

定理 3.1 と 4.1 を組み合わせ，素数定理を得る．

【定理 4.2】

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\exp(-A(\log x)^{\frac{1}{2}})). \tag{4.8}$$

証明 関係式 (2.12) により

$$\psi(x)=x+O(x\exp(-A(\log x)^{\frac{1}{2}})) \tag{4.9}$$

を示せば充分である．式 (4.6) において $T=\exp((\log x)^{\frac{1}{2}})$ として，

$$|\psi(x)-x| \ll x^{b}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{1}{|\rho|}+x\exp(-\tfrac{1}{2}(\log x)^{\frac{1}{2}}).$$

ここに，$b = \max_{|\gamma|<T} \beta$ $(\rho = \beta + i\gamma)$ である．評価 (3.18) を用いて右辺の和は $O((\log T)^2)$ であるから，(3.14) により，(4.9) を得る．

残余項の評価を (4.8) より弱いもので良しとするならば，素数定理は上記よりも遥かに容易に証明できる．先ず，(3.12) を σ について積分し，

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta^4(\sigma+it)||\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \qquad (\sigma > 1). \tag{4.10}$$

また，$\zeta(s) = O(\log t)$，$\zeta'(s) = O(\log^2 t)$ $(\sigma > 1-(\log t)^{-1},\ t \geq 2)$ に注意する．実際，(1.17) よりやや詳しく，任意の $\sigma > -1$，整数 $N \geq 1$ について

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \rho(x)x^{-s-1}dx \tag{4.11}$$

と書けるが，$N = [t]$ とすれば前者が得られ，s について微分してから $N = [t]$ とすれば後者が得られる．これらから，$\sigma > 1$ について

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \leq \{\zeta(\sigma)\}^{\frac{3}{4}}|\zeta(\sigma+2it)|^{\frac{1}{4}} \ll (\sigma-1)^{-\frac{3}{4}}\log^{\frac{1}{4}} t$$

及び $\sigma > 1-(\log t)^{-1}$ について

$$\zeta(1+it) - \zeta(\sigma+it) = -\int_1^\sigma \zeta'(\xi+it)d\xi \ll (\sigma-1)\log^2 t. \tag{4.12}$$

よって，絶対常数 $c_1, c_2 > 0$ があって

$$|\zeta(1+it)| > c_1\frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{\log^{\frac{1}{4}} t} - c_2(\sigma-1)\log^2 t \qquad (\sigma > 1).$$

ここで，充分小さな $c > 0$ をとり，$\sigma = 1 + c(\log t)^{-9}$ とおけば

$$\zeta(1+it) \gg (\log t)^{-7} \qquad (t \geq 2) \tag{4.13}$$

を得る．この評価と (4.12) を組み合わせれば

$$|\zeta(\sigma+it)| > c_3(\log t)^{-7} - c_2(\sigma-1)\log^2 t \qquad (\sigma > 1-(\log t)^{-1}).$$

従って，

$$\zeta(s)^{-1} \ll \log^7 t, \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log^9 t \qquad (\sigma > 1-A(\log t)^{-9},\ t \geq 2). \tag{4.14}$$

後者と (4.3) から

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O(x \exp(-A(\log x)^{\frac{1}{10}})). \tag{4.15}$$

[附記] 式 (4.6)–(4.7) を「Explicit Formula」という．正の実軸上に有界な台をもつ C^∞ 函数 g について，その Mellin 変換を G とすれば

$$\sum_n \frac{g(n)}{\sqrt{n}}\Lambda(n) = G(\tfrac{1}{2}) - \sum_\rho G(\rho - \tfrac{1}{2}) + \int_0^\infty \frac{g(x)}{x^{\frac{3}{2}}(x^2-1)}dx \tag{4.16}$$

となることも同様に示されるが，これも Explicit Formula という．Legendre (1798) の予想した素数定理

$$\pi(x) = (1 + o(1))\frac{x}{\log x}$$

は 1896 年に Hadamard と de la Vallée Poussin によって互いに独立に証明された．定理 4.2 は de la Vallée Poussin (1899) による．簡易証明 (4.10)–(4.15) は Landau によると思われる．近似式 (4.1) を (1.3) や (3.20) に適用して

$$\sum_{n \le x} \mu(n) = O\left(x \exp(-A(\log x)^{\frac{1}{2}})\right), \tag{4.17}$$

$$\prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-c_E}}{\log x}\left(1 + O\left(\exp(-A(\log x)^{\frac{1}{2}})\right)\right) \tag{4.18}$$

を証明することもできる ([13, 第 3 章])．なお，対数積分が $\pi(x)$ の良い近似値を与えることは，少年 Gauss (1792/93) によって観察されていた．また，Tchebychev (1851) は，何らかの漸近展開が $\pi(x)$ について成立するとすればそれは Gauss 予想の通りとなることを証明していた．

—5—

Riemann 予想と Hoheisel

残された予想 (5)，即ち「Riemann 予想」について多少述べねばない．

何よりも先ず，Riemann 予想は必要であろうか．勿論，この問は一般的には意味をなさない．しかし，素数分布論において緊要か否か，と言うならば意味をもち得る．その理由を本節で示し，併せて，今後の議論の展開を示唆しよう．

Riemann 予想を仮定すれば，(3.18) と (4.6) から

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x). \tag{5.1}$$

あるいは，少し粗く，

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{5.2}$$

後者が Riemann 予想と同値であることは見やすい．実際，等式 (1.4) を

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{-s} d(\psi(x) - x) \qquad (\sigma > 1)$$

と書き，部分積分を実行して見ればよい．従って，(5.1) と (5.2) は実は同値である．

一方，素数分布論の最も基本的な命題は何であろうか．それは，任意に与えられた区間において，素数を発見できるか否かを定める，換言すれば，素数を次々と見つけるためにはどの様な区間を用意すれば足りるのか定めることであろう．即ち，n 番目の素数を p_n とするとき，差 $p_{n+1} - p_n$ に対して，なるべく鋭い評価を得ることである．実験的には

$$p_{n+1} - p_n \ll \log^2 n \tag{5.3}$$

が相当に尤もらしいが，もし事実であれば，素数の集合は極めて平坦な分布をなしていることとなる．ところが，(5.2) からは

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{5.4}$$

より深い評価を得ることはできない．評価 (5.3) と (5.4) の較差は余りにも大きい．しかし，現今の所，これを埋める手がかりは全く知られていない．

では，(5.4) を示すには，Riemann 予想は必要であろうか．これが上記の問を具体化したものである．驚くべきことに，1930 年に Hoheisel は「必要性の否定」を強く示唆する発見を成した．彼は，$\zeta(s)$ の理論を用い，何らの仮定なく，

$$\varpi_0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(p_{n+1} - p_n)}{\log p_n} < 1 \tag{5.5}$$

を証明した．つまり，

$$p_{n+1} - p_n \ll p_n^{\varpi} \qquad (n \geq 1) \tag{5.6}$$

となる絶対常数 $\varpi < 1$ の存在を示したのである．この結果の真価を味わうには，次の事に注意すれば充分であろう．Riemann 予想と (5.4) との関係を一般化すれば，「準 Riemann 予想」

$$\zeta(s) \neq 0 \quad (\sigma > \varpi_0) \tag{5.7}$$

と (5.5) との関係となる．

Hoheisel の議論を簡易化して示すために，次の二つの仮定を導入する．

(a) 絶対常数 $0 < \tau < 1$ があって

$$\zeta(s) \neq 0 \qquad \left(\sigma > 1 - A(\log(|t| + 2))^{-\tau}\right). \tag{5.8}$$

(b) 複素零点 $\rho = \beta + i\gamma$ の内，$\alpha \leq \beta$, $|\gamma| \leq T$ となるものの個数を $N(\alpha, T)$ とする．このとき，絶対常数 $\theta \geq 2$ が存在して

$$N(\alpha, T) \ll T^{\theta(1-\alpha)} \log^A T \qquad (\tfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1; T \geq 2). \tag{5.9}$$

【定理 5.1】 上記の仮定 (a), (b) のもとに

$$\pi(x+h) - \pi(x) = (1 + o(1))\frac{h}{\log x} \qquad (x^{1-1/\theta+\varepsilon} < h < x). \tag{5.10}$$

従って，

$$\varpi_0 \leq 1 - \theta^{-1}. \tag{5.11}$$

証明 式 (4.6) において $T = x^{\omega}$ $(0 < \omega < 1/\theta)$ とすれば，任意の $0 \leq h < x$ について

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \int_x^{x+h} \left(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| < T}} y^{\rho-1} \right) dy + O(x^{1-\omega} \log^2 x).$$

一方，

$$\left|\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|<T}} y^{\rho-1}\right| \le -\int_0^1 y^{\alpha-1}dN(\alpha,T)$$

$$= O(N(T)y^{-\frac{1}{2}}) + (\log y)\int_{\frac{1}{2}}^1 N(\alpha,T)y^{\alpha-1}d\alpha.$$

但し，$N(T)$ は以前の通りである．ここで，仮定 (a), (b) を用いれば，$\xi = A(\log T)^{-\tau}$ として

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 N(\alpha,T)y^{\alpha-1}d\alpha \ll (\log x)^A \int_{\frac{1}{2}}^{1-\xi} (x^{-1}T^{\theta})^{1-\alpha}d\alpha$$

$$\ll (\log x)^A x^{(\theta\omega-1)\xi}.$$

これらをまとめ，(2.8) 及び (2.12) に注意して (5.10) を得る．

Hoheisel 自身の結果は $\varpi_0 \le 1 - \frac{1}{33000}$ であり，数値としては印象の強いものではない．しかし，それは当時，仮定 (a) に相当する結果が得られていなかったことに主な原因があった．しかるに間もなく，I.M. Vinogradov (1935) の理論が登場し，仮定 (a) は事実として樹立された．それ以後，Hoheisel の方法は「零点密度理論」として素数分布論の中枢に置かれることとなったのである．何よりも，もしも

$$N(\alpha,T) \ll T^{2(1-\alpha)}\log^A T \qquad (\tfrac{1}{2} \le \alpha \le 1), \tag{5.12}$$

つまり，$\theta = 2$ が成立するならば Riemann 予想からの帰結である (5.4) を証明できることになる．しかも，Riemann 予想からは (5.4) より深い結論を得ることは極めて困難に思われる．それ故に，零点密度理論は素数分布論とほぼ同義として研究されてきたのである．「密度予想」(5.12) は未だ打ち立てられていない．しかし，それへの努力の過程において多くの意義深い理論や事実が収穫された．

なお，臨界線 ($\sigma = \frac{1}{2}$) の上に実際に乗っている複素零点の個数を議論する研究もある．それらの結果は興味深いが，素数分布との関連は希薄である．定理 4.1 は複素零点の水平的分布こそが本質的であることを明示している．

[附記]　Riemann 予想については後に別の観点から少し触れる．また，[17，第 14 章] も見よ．Hoheisel 理論はいずれは忘却されるであろう．しかし，素数分布論のみならず数論の多くの問題は Riemann 予想を超えて遥かに深い所に位置すること

も心得ておくべきである．Riemann 予想そのものについては Selberg 及び亡き恩師 Turán の一連の研究の外にはあまり見るべきものは無い．他の多くは浅き印象記の如く著者には感じられる．Hilbert と Pólya の着想に端を発する作用素論からの構想は魅惑的である．しかし，古典論のいずれかを超える結論は今だに得られていない．

—6—
Weyl と van der Corput

Vinogradov の理論は第 7, 8 節にて展開される．定理 3.1 を証明するに当たって整函数の大域的理論を援用したが，いずれ詳しく述べる様に，Landau (1924) による局所的な議論のみでも同じ結果を得ることができる．また，著者 (1979) の「篩法」を用いる論法によるならば，複素函数論すら必要ない．前者に比べ後二者の優れている点は (3.14) の改良の手がかりを与えることである．即ち，垂直線 $\sigma = 1$ の近傍において $\zeta(s)$ のしかるべき評価を得ることができるならば，前節の仮定 (a) に相当する結果をこれら二方法はもたらすのである．そして，Vinogradov の理論はその様な $\zeta(s)$ の評価を与える現今唯一の方法である．ここでは Vinogradov の理論への導入として，それ以前の方法の概略を示そう．

リーマンゼータ函数の評価について初めて自明でない結果を与えたのは Weyl (1921) である．彼の方法を説明するために，一般的な「三角和」

$$F(N) = \sum_{N \le n \le 2N} e(f(n)) \tag{6.1}$$

を考える．但し，$f(x)$ は滑らかな実数値函数とする．単位円周上に点 $e(f(n))$ が大略原点対称に分布していれば，右辺の各項の打ち消し合いは大きく，$|F(N)|$ は自明な評価 $O(N)$ よりずっと小さくなるはずである．では，この打ち消し合いをどの様にして検出するか．Weyl の着想 (1916) は簡明である．区間 $(N, 2N]$ を小

区間に分け $F(N)$ の代わりに

$$\sum_{u=1}^{U} e(f(u+M)) \qquad (M \approx N) \tag{6.2}$$

を考える．但し，$U = N^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ は後に適当に定めるべきものである．函数 f が充分に滑らか，例えば，応用上常例である C^{∞} 級 であれば，$f(u+M)$ は変数 u の多項式で近似され，それによる誤差は無視できる．従って，(6.1) のかわりに実数係数多項式 g につき和

$$G(U) = \sum_{u=1}^{U} e(g(u)) \tag{6.3}$$

の評価を課題とする．これは今日「Weyl 和」とよばれる．Weyl は自明な等式

$$\begin{aligned} |G(U)|^2 &= \sum_{u_1, u_2} e(g(u_1) - g(u_2)) \\ &= \sum_{u} \sum_{r} e(g(u+r) - g(u)) \end{aligned} \tag{6.4}$$

に注目した．和の範囲は省略されている．ここで，$g(u+r) - g(u)$ は変数 u については g よりも次数が低い多項式である．そこで，操作 (6.4) を繰り返せば，ついには

$$S = \sum_{a < u \le b} e(\alpha u + \beta) \qquad (\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}) \tag{6.5}$$

なる形の和に達する．勿論，

$$|S| \le \min\left\{ b - a + 1, \frac{1}{|\sin \pi\alpha|} \right\}. \tag{6.6}$$

ここから $G(U)$ ないしは $F(N)$ の自明でない評価が導かれ，それを函数 $f(x) = (t/2\pi)\log x$ に適用して $\zeta(s)$ についての結論が得られる．

一方，van der Corput (1921) が行った様に Poisson 和公式を $F(N)$ に応用することも考えられる．等式 (1.24) により (6.1) の右辺を変換し，

$$F(N) = \int_{N}^{2N} e(f(x))dx$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\int_N^{2N}\frac{f'(x)}{f'(x)+n}d(e(f(x)+nx))+O(1). \tag{6.7}$$

簡単のために，

$$f'(x) \text{ は単調且つ } |f'(x)|\leq\eta<1 \qquad (N<x\leq 2N) \tag{6.8}$$

と仮定する．このとき，第 2 平均値定理により (6.7) の無限和内の各積分は $O(1/|n|)$ と評価される．従って，

$$F(N)=\int_N^{2N} e(f(x))dx+O(1) \tag{6.9}$$

を得る．条件 (6.8) が満たされない場合，例えば $f'(x)+\nu=0$ が整数 $\nu\neq 0$ について積分区間内で解をもつ場合には,「鞍点法」を適用すればよい．いずれにせよ，和 (6.1) の評価を積分の評価に変換でき，一般的に後者は Weyl の反復法より有効な結論をもたらす．具体的な応用例を次に示す．

【定理 6.1】

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\ll t^{\frac{1}{6}}(\log t)^{\frac{3}{2}} \qquad (t\geq 2). \tag{6.10}$$

証明　表示 (4.11) に戻り，展開 (1.25) を用いて

$$\int_{N_1}^{N_2}\rho(x)x^{-s-1}=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{N_1}^{N_2}x^{-s-1}\sin(2m\pi x)dx.$$

もしも，$t\leq N_1<N_2$ であるならば，(6.7) にならって

$$\int_{N_1}^{N_2}x^{-\sigma-1}\exp(it\log x\pm 2m\pi ix)dx\ll N_1^{-\sigma-1}m^{-1}.$$

従って，(4.11) から近似式

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq t}\frac{1}{n^s}+O(t^{-\sigma}) \qquad (\sigma>0;\, t\geq 1) \tag{6.11}$$

が従う．この右辺において $\sigma=\frac{1}{2}$ であれば，$n<t^{\frac{1}{3}}$ なる部分は (6.10) と比較し

て無視できる故,「ゼータ和」

$$Z(N,t) = \sum_{N<n\le 2N} n^{it} = \sum_{N<n\le 2N} e\left(\frac{t}{2\pi}\log n\right)$$

を条件 $t^{\frac{1}{3}} \le N \le t$ のもとに考察する．但し，t は充分大きいものとする.「摂動」を応用するために

$$U = Nt^{-\frac{1}{3}} \le \sqrt{N}t^{\frac{1}{6}}$$

と置き,

$$Z(N,t) = U^{-1} \sum_{0\le u<U} \sum_{N<n\le 2N} (n+u)^{it} + O(U) \tag{6.12}$$

に注意する．明らかに,

$$|Z(N,t)| \ll N^{\frac{1}{2}} U^{-1} \left(\sum_{0\le u<v<U} |Z(N,t;u,v)| \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{N}t^{\frac{1}{6}}. \tag{6.13}$$

但し,

$$Z(N,t;u,v) = \sum_{N<n\le 2N} e(h(n)), \quad h(n) = (t/2\pi)\log((n+u)/(n+v)).$$

以下，$u<v$ なる場合を扱う．Poisson 和公式 (1.24) により

$$Z(N,t;u,v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_N^{2N} e(h(x)+nx)dx + O(1).$$

鞍点が積分区間内に入る n は区間

$$J = [-(1/\pi)(v-u)tN^{-2},\ -(1/4\pi)(v-u)tN^{-2}]$$

に含まれる故，U の選び方から $N \le t^{\frac{2}{3}}$ なる場合のみ鞍点法の応用を考慮する必要がある．そこでこの場合に，$n \in J$ について鞍点を x_0 とし積分を

$$\left(\int_N^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{2N} \right) e(h(x)+nx)dx$$

と分割する．但し，$\delta>0$ はこれから定めるべきものである．第 1 積分を

$$\frac{1}{2\pi i}\int_N^{x_0-\delta}\frac{1}{h'(x)+n}de(h(x)+nx)$$

と書き，

$$|h'(x)+n|=\left|\int_{x_0}^{x}h''(\xi)d\xi\right|\gg\delta(v-u)tN^{-3}$$

に注意する．第 2 平均値定理により第 1 積分は $O\left(N^3/(\delta t(v-u))\right)$．明らかに，同じ評価が第 3 積分についても成立する．第 2 積分には自明な評価を用いて，$\delta=N^{\frac{3}{2}}(t(v-u))^{-\frac{1}{2}}$ と定める．これらをまとめて，

$$Z(N,t;u,v)=\sum_{n\notin J}\int_N^{2N}e(h(x)+nx)dx+O\left((t(v-u))^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\right)\qquad(N\le t).$$

右辺の無限和は (6.7) と同様にして，

$$\int_N^{2N}e(h(x))dx+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{n\notin J\\ n\neq 0}}\frac{1}{n}\int_N^{2N}\frac{h'(x)}{h'(x)+n}de(h(x)+nx)+O(1)$$

と変形され，

$$\begin{aligned}&\ll N^2(t(v-u))^{-1}+\sum_{\substack{n\notin J\\ n\neq 0}}\frac{1}{|n|}\sup_{N\le x\le 2N}\frac{|h'(x)|}{|h'(x)+n|}+1\\ &\ll N^2(t(v-u))^{-1}+\log(2+t(v-u)N^{-2})\end{aligned}$$

と評価できる．従って，

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le u<v\le U}|Z(N,t;u,v)|\\ &\ll N^2t^{-1}U\log U+U^2\log t+N^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}U^{\frac{5}{2}}\\ &\ll U^2t^{\frac{1}{3}}\log t.\end{aligned}$$

式 (6.13) に戻り，

$$Z(N,t)\ll N^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{6}}(\log t)^{\frac{1}{2}}.$$

これを (6.11) と組み合わせて，(6.10) を得る．

[附記]　Weyl や van der Corput の方法の詳細については [17, 第 5 章] を見よ．後者は近年 Bombieri–Iwaniec の着想により改良された．これによる定理 6.1 の改良等については [4] を見よ．

—7—
Vinogradov

Van der Corput の方法は，例えば点 $e(f(n))$ が高速で単位円周上を回転する場合には Weyl の方法よりも劣る結果をもたらすことがある．何故ならば，その場合 $f'(x)$ は極端に大きくなり，(6.7) において鞍点法を適用すべき積分項が余りに多く制御不可能となるからである．実は，$\zeta(s)$ を直線 $\sigma = 1$ の近傍で評価する問題は正にその様な場合なのである．

この高速回転の場合に有効な方法が Vinogradov (1935) の理論である．彼の着想は，Weyl の議論に Diophantus 方程式の理論を導入した点にある．詳しくは次の通りである．Weyl 和 (6.3) において多項式 g を

$$g(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 \qquad (a_j \in \mathbb{R},\ 0 \le j \le k)$$

とする．このとき任意の整数 $q \ge 1$ について

$$|G(U)|^{2q} = \sum_{\underline{\lambda}} J_{q,k}(U, \underline{\lambda}) \prod_{j=1}^{k} e(a_j \lambda_j). \tag{7.1}$$

但し，$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^k$ であり，$J_{q,k}(U, \underline{\lambda})$ は方程式系

$$\begin{gathered}(x_1^l + x_2^l + \cdots + x_q^l) - (x_{q+1}^l + x_{q+2}^l + \cdots + x_{2q}^l) = \lambda_l \\ 1 \le x_j \le U \quad (1 \le j \le 2q), \quad 1 \le l \le k\end{gathered} \tag{7.2}$$

の整数解の個数である．Weyl はこの関係式において $q = 2^{k-2}$ なる場合を考察したと言える．評価 (6.6) を用いるべく (7.2) を変形した訳である．しかし，変数の個数は k と共に指数的に大きくなる故，k が増加するにつれ (6.6) の使用は損失

の多いものとなる．Vinogradov は，q を Weyl の様に非常に大きくとらなくとも，$J_{q,k}(U,\underline{\lambda})$ を制御できることに想到し，その事実によって $G(U)$ の評価を得た．彼の議論においては q は k のある冪乗の大きさであり，Weyl の方法と比べ著しい改良である．

勿論，上記はかなり単純化した説明である．例えば，(7.1) の指数函数の部分と $J_{q,k}(U,\underline{\lambda})$ とを分離する必要については触れなかった．しかしこの様な技巧的な点は具体的な応用で例示するのがふさわしい．そこで，$\zeta(s)$ の評価への応用を前提としてゼータ和 $Z(N,t)$ をとり上げる．但し，N, $t>0$ は共に充分大きいものとし，$N \le t$ と仮定する．

先ず，任意の整数 $U \ge 1$ について

$$Y(n,t)=\sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{U} e\left(\frac{t}{2\pi}\log\left(1+\frac{uv}{n}\right)\right)$$

とすれば (6.13) と同様に

$$|Z(N,t)| \le U^{-2}\sum_{N<n\le 2N}|Y(n,t)|+O(U^2). \tag{7.3}$$

また，任意の整数 $k \ge 1$ について

$$W(n,t)=\sum_{u=1}^{U}\sum_{v=1}^{U} e(\alpha_1 uv+\alpha_2(uv)^2+\cdots+\alpha_k(uv)^k),$$
$$\alpha_\nu=(-1)^{\nu-1}\frac{t}{2\pi\nu n^\nu} \tag{7.4}$$

とすれば

$$Y(n,t)=W(n,t)+O(tU^{2(k+2)}n^{-k-1}).$$

即ち，

$$|Z(N,t)| \le U^{-2}\sum_{N<n\le 2N}|W(n,t)|+O(U^2+tN(U^2/N)^{k+1}).$$

次に $0<\delta<1$ を固定し

$$U=[N^{\delta/2}],\quad k=\left[\frac{\log t}{(1-\delta)\log N}\right]+1 \tag{7.5}$$

とおく．容易に

$$|Z(N,t)| \le U^{-2} \sum_{N<n\le 2N} |W(n,t)| + O(N^{\delta}) \tag{7.6}$$

を得る．

さて，任意の整数 $q \ge 1$ について，Hölder 不等式により

$$\begin{aligned}
&|W(n,t)|^{4q^2} \\
&\le \left(U^{2q-1}\sum_{u=1}^{U}\left|\sum_{v=1}^{U} e(\alpha_1 uv + \alpha_2 (uv)^2 + \cdots + \alpha_k (uv)^k)\right|^{2q}\right)^{2q} \\
&\le U^{4q^2-2q}\left(\sum_{\underline{\lambda}} J_{q,k}(U,\underline{\lambda})\left|\sum_{u=1}^{U} e(\alpha_1\lambda_1 u + \alpha_2\lambda_2 u^2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k u^k)\right|\right)^{2q} \\
&\le U^{8q^2-4q}\sum_{\underline{\lambda}} J_{q,k}(U,\underline{\lambda})\left|\sum_{u=1}^{U} e(\alpha_1\lambda_1 u + \alpha_2\lambda_2 u^2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k u^k)\right|^{2q}.
\end{aligned}$$

ここで

$$J_{q,k}(U,\underline{\lambda}) \le J_{q,k}(U,\underline{0})$$

に注意する．実際，

$$\begin{aligned}
J_{q,k}(U,\underline{\lambda}) = \int_{[0,1]^k} &\left|\sum_{u=1}^{U} e(\theta_1 u + \theta_2 u^2 + \cdots + \theta_k u^k)\right|^{2q} \\
&\times e(-\theta_1\lambda_1 - \theta_2\lambda_2 - \cdots - \theta_k\lambda_k)\, d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_k
\end{aligned} \tag{7.7}$$

より明白である．従って，

$$\begin{aligned}
&|W(n,t)|^{4q^2} \\
&\le U^{8q^2-4q} J_{q,k}(U,\underline{0})\left|\sum_{\underline{\lambda},\,\underline{\kappa}} J_{q,k}(U,\underline{\kappa}) e(\alpha_1\lambda_1\kappa_1 + \alpha_2\lambda_2\kappa_2 + \cdots + \alpha_k\lambda_k\kappa_k)\right| \\
&\le U^{8q^2-4q}\{J_{q,k}(U,\underline{0})\}^2 \prod_{\nu=1}^{k} S_\nu.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

但し，$\|x\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$ として

$$S_\nu = \sum_{|\kappa|<U_\nu} \min\left(2U_\nu, \frac{1}{2\|\alpha_\nu \kappa\|}\right) \qquad (U_\nu = qU^\nu).$$

この和を評価するために

$$\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{t}{2\pi\nu n^\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{l} + \frac{\theta}{l^2}$$
$$(l = [2\pi\nu n^\nu/t], \quad |\theta| \le 1)$$

と書く．すると，

$$S_\nu \ll (U_\nu/l + 1)\max_Q \sum_{\kappa=1}^{l} \min\left(U_\nu, \frac{1}{\|\alpha_\nu(\kappa + lQ)\|}\right)$$
$$= (U_\nu/l + 1)\max_Q \sum_{\kappa=1}^{l} \min\left(U_\nu, \frac{1}{\|a(\kappa)/l + b(\kappa)/l^2\|}\right).$$

但し，$a(\kappa) = (-1)^{\nu-1}\kappa + [\theta Q]$, $b(\kappa) = \theta\kappa + (\theta Q - [\theta Q])l$ である．これより，$a(\kappa)$ の値を法 l で分類して

$$S_\nu \ll (U_\nu/l + 1)(U_\nu + l\log l)$$
$$\ll U_\nu^2(1/l + 1/U_\nu + l/U_\nu^2)\log l$$

を得る．従って，もしも

$$\frac{\log t}{(1-\delta/4)\log N} \le \nu \le \frac{\log t}{(1-\delta/3)\log N} \tag{7.9}$$

であるならば，絶対常数 $c > 0$ があって

$$S_\nu \le A^\nu U_\nu^2 t^{-c\delta}.$$

そこで (7.8) において，(7.9) を満たさない ν については自明な評価 $S_\nu \le 4U_\nu^2$ を用いれば，

$$|W(n,t)|^{4q^2} \le A^{k^2} q^{2k} U^{8q^2-4q+k(k+1)} \{J_{q,k}(U,\underline{0})\}^2 t^{-c\delta^2(\log t)/(\log N)} \tag{7.10}$$

を得る．

こうしてゼータ和の評価を，一つの Diophantus 問題，即ち，因子 $J_{q,k}(U,\underline{0})$ の評価へ還元することがなされた訳である．

[附記] Vinogradov の理論は初め「Waring 問題」への応用を念頭において展開された．この側面や理論の原形については彼の著書 [19] を見よ．なお，式 (7.3) か

ら (7.10) までの議論は [7] から借用した.

—8—
Vinogradov 平均値定理

因子 $J_{q,k}(U,\underline{0})$ の評価について詳述する. 但し, 以下 $J_{q,k}(U,\underline{0})$ を $J_{q,k}(U)$ と略記する. 定義 (7.2) を繰り返すが, $J_{q,k}(U)$ は方程式系

$$x_1^l + x_2^l + \cdots + x_q^l = x_{q+1}^l + x_{q+2}^l + \cdots + x_{2q}^l \quad (1 \le l \le k) \tag{8.1}$$

の $x_j \in \mathbb{Z}$, $1 \le x_j \le U$ $(1 \le j \le 2q)$ なる解の個数である. これの評価を「Vinogradov の平均値定理」というのは積分表現 (7.7) $(\underline{\lambda} = \underline{0})$ があるからである. つまり, Weyl 和

$$\sum_{x=1}^{U} e(\theta_k x^k + \theta_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \theta_1 x)$$

の k-次元単位立方体上の $2q$-乗平均が $J_{q,k}(U)$ である.

Vinogradov 自身の議論は難解である故, ここでは Linnik (1943) による簡易化をとり入れる. 彼の着想は p-進法による問題 (8.1) の変換（補題 8.2）であるが, そこでは次の評価が重要になる.

【補題 8.1】 任意の素数 $p > k$, 任意の整数 λ_l $(1 \le l \le k)$ についての合同式系

$$x_1^l + x_2^l + \cdots + x_k^l \equiv \lambda_l \pmod{p^l} \quad (1 \le l \le k) \tag{8.2}$$

を条件

$$D \le x_j < D + Mp^k \quad (1 \le j \le k); \quad x_j \not\equiv x_{j'} \pmod{p} \quad (j \ne j') \tag{8.3}$$

のもとで考える. 解の個数を X とすると, 任意の D 及び任意の整数 $M \ge 1$

について

$$X \leq k!M^k p^{\frac{1}{2}k(k-1)} \tag{8.4}$$

である．

証明 明らかに $D=0$ と仮定して一般性を失わない．各 x_j を p-進展開して

$$\begin{gathered} x_j = x_{j0} + x_{j1}p + \cdots + x_{jk}p^k \\ x_{j0} \neq x_{j'0}\,(j \neq j'), \\ 0 \leq x_{jr} < p,\, 1 \leq r < k\,;\, 0 \leq x_{jk} < M. \end{gathered} \tag{8.5}$$

系 (8.2) から

$$x_{10}^l + \cdots + x_{k0}^l \equiv \lambda_l \pmod p \quad (1 \leq l \leq k). \tag{8.6}$$

よって，$x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0}$ は法 p についてのある k-次合同式の相異なる解の一組でなければならない．この合同式の係数は $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ で一意的に定まる故，解の組は順列を無視すれば唯一つである．即ち，条件 (8.5) のもとに (8.6) の解の数は高々 $k!$ である．次に $x_{j0}, x_{j1}, \cdots, x_{jl-1}$ $(1 \leq l < k)$ が定められたとして，系

$$x_1^m + \cdots + x_k^m \equiv \lambda_m \pmod{p^{l+1}} \quad (l+1 \leq m \leq k) \tag{8.7}$$

を考える．これは系

$$x_{10}^{m-1}x_{1l} + \cdots + x_{k0}^{m-1}x_{kl} \equiv \lambda'_m \pmod p \qquad (l+1 \leq m \leq k) \tag{8.8}$$

と同値である．但し，

$$\lambda'_m p^l = \lambda_m - \sum_{j=1}^{k}(x_{j0} + x_{j1}p + \cdots + x_{jl-1}p^{l-1})^m.$$

連立一次合同式 (8.8) の係数行列の階数は (8.5) により $k-l$ である故，解 $(x_{1l}, \cdots, x_{kl})$ の個数は p^l である．更に，$(x_{1k}, \cdots, x_{kk})$ の個数は明らかに M^k 以下である．以上をまとめて，(8.4) を得る．

【補題 8.2】 整数変数 k は充分大きいものとする．このとき，条件

$$U \geq (2k)^{3k}, \quad q \geq k(k+1) \tag{8.9}$$

のもとに

$$U^{1-1/k} \leq U_1 \leq 4U^{1-1/k} \tag{8.10}$$

なる U_1 が存在し

$$J_{q,k}(U) \leq 2^{4q} U^{2q/k+(3k-5)/2} J_{q-k,k}(U_1) \tag{8.11}$$

となる.

証明　先ず, 定理 4.2 により $\frac{1}{2}U^{1/k} < p < U^{1/k}$ となる素数 p を定め, $U_1 = [U/p]+1$ とおく. 明らかに, $J_{q,k}(U) \leq J_{q,k}(pU_1)$ である. これは系 (8.1) の代わりに, 系

$$\begin{aligned} &(x_1+py_1)^l + \cdots + (x_q+py_q)^l \\ &= (x_{q+1}+py_{q+1})^l + \cdots + (x_{2q}+py_{2q})^l \\ &\quad 1 \leq x_j \leq p, \quad 0 \leq y_j < U_1 \quad (1 \leq j \leq 2q) \quad (1 \leq l \leq k) \end{aligned} \tag{8.12}$$

を考察する, と言うのと同じである. これの解の内, 集合 $\{x_1, \cdots, x_q\}$ 及び $\{x_{q+1}, \cdots, x_{2q}\}$ が共に少なくとも k 個の相異なる元を含むものを第 1 種, 残り全てを第 2 種ということとする.

第 1 種解の個数 J_1 の評価を行おう. 条件

$$x_j \neq x_{j'}, \quad x_{q+j} \neq x_{q+j'} \quad (1 \leq j < j' \leq k) \tag{8.13}$$

を満たす (8.12) の解の個数を J_1' とすれば $J_1 \leq q^{2k} J_1'$ である. J_1' を積分表示するために

$$S(x) = \sum_{0 \leq y < U_1} e(\theta_1(x+py) + \theta_2(x+py)^2 + \cdots + \theta_k(x+py)^k)$$

とすれば, $\{x_1, \cdots, x_k\}$ をその様な集合として

$$\begin{aligned} J_1' &= \int_{[0,1]^k} \left| \sum_{x_1,\cdots,x_k} S(x_1)\cdots S(x_k) \right|^2 \left| \sum_{x=1}^{p} S(x) \right|^{2q-2k} d\theta_1 \cdots \theta_k \\ &\leq p^{2q-2k} J_1''. \end{aligned}$$

ここに,

$$J_1'' = \max_{1\le x\le p} \int_{[0,1]^k} \Big| \sum_{x_1,\cdots,x_k} S(x_1)\cdots S(x_k)\Big|^2 \big|S(x)\big|^{2q-2k} d\theta_1\cdots\theta_k.$$

この積分は系

$$\begin{aligned}&(x_1 - x + py_1)^l + \cdots + (x_k - x + py_k)^l \\ &\quad -(x_{q+1} - x + py_{q+1})^l - \cdots - (x_{q+k} - x + py_{q+k})^l \\ &\qquad = p^l(y_{k+1}^l + \cdots + y_q^l - y_{q+k+1}^l - \cdots - y_{2q}^l) \quad (1\le l\le k)\end{aligned}$$

の条件 (8.13) 下での解の個数と同じである．左辺の各項を展開してみればよい．この系の解で

$$y_{k+1}^l + \cdots + y_q^l - y_{q+k+1}^l - \cdots - y_{2q}^l = \mu_l \quad (1\le l\le k)$$

となるものの個数を $J_1''(\underline{\mu})$ とすれば

$$J_1'' \le \sum_{\underline{\mu}} J_1''(\underline{\mu}) J_{q-k,k}(U_1,\underline{\mu}) \le J_{q-k,k}(U_1) \sum_{\underline{\mu}} J_1''(\underline{\mu}).$$

この最右辺の和は系

$$\begin{aligned}&(x_1 - x + py_1)^l + \cdots + (x_k - x + py_k)^l \\ &\equiv (x_{q+1} - x + py_{q+1})^l + \cdots + (x_{q+k} - x + py_{q+k})^l \pmod{p^l} \quad (1\le l\le k)\end{aligned}$$

の条件 (8.13) 下での解の個数である．$x_{q+1},\cdots,x_{q+k},y_{q+1},\cdots,y_{q+k}$ を固定したとき，その様な解の個数は補題 8.1 により評価できる．即ち，

$$J_1'' \le k!([U/p^k]+1)^k (pU_1)^k J_{q-k,k}(U_1).$$

以上から

$$\begin{aligned}J_1 &\le q^{2k} p^{2q-2k} k!([U/p^k]+1)^k (pU_1)^k J_{q-k,k}(U_1) \\ &\le 2^{4q-1} U^{2q/k+(3k-5)/2} J_{q-k,k}(U_1)\end{aligned}$$

を得る．

第 2 種解の個数 J_2 の評価は容易である．集合 $\{x_1,\cdots,x_q\}$ あるいは $\{x_{q+1},\cdots,x_{2q}\}$ が高々 $k-1$ 個の相異なる元を含むものとして

$$\begin{aligned}J_2 &= \int_{[0,1]^k} \sum_{\substack{x_1,\cdots,x_q\\ x_{q+1},\cdots,x_{2q}}} S(x_1)\cdots S(x_q)\overline{S(x_{q+1})}\cdots\overline{S(x_{2q})}d\theta_1\cdots d\theta_k\\ &\le \Bigg(\sum_{\substack{x_1,\cdots,x_q\\ x_{q+1},\cdots,x_{2q}}} 1\Bigg) \times \int_{[0,1]^k}\sum_{x=1}^{p}|S(x)|^{2q}d\theta_1\cdots d\theta_k\\ &\le \binom{p}{k-1}(k-1)^q p^q J_{q,k}(U_1).\end{aligned}$$

即ち，

$$\begin{aligned}J_2 &\le k^q p^{q+k-1} U_1^{2k} J_{q-k,k}(U_1)\\ &\le 2^{4q-1} U^{2q/k+(3k-5)/2} J_{q-k,k}(U_1).\end{aligned}$$

これらの評価をまとめて (8.11) を得る．

【定理 8.1】　任意の整数 $\tau \ge 0$，充分大きな整数 k について，条件

$$q \ge k(k+\tau) \tag{8.14}$$

のもとに，充分大きな U について

$$J_{q,k}(U) \le (4k)^{4q\tau} U^{2q-k(k+1)/2+\eta(k,\tau)}. \tag{8.15}$$

但し，

$$\eta(k,\tau) = \tfrac{1}{2}k(k+1)(1-1/k)^\tau.$$

証明　先ず，$\tau = 0$ であれば (8.15) は自明な評価となることに注意する．場合を分けて，条件

$$U \ge (2k)^{3k(1+1/(k-1))^\tau} \tag{8.16}$$

のもとに考察する．整数 τ についての帰納法を用いよう．即ち，$\tau = m$ で定理は成立していると仮定し，

$$q \ge k(k+m+1), \quad U \ge (2k)^{3k(1+1/(k-1))^{m+1}}$$

なる場合を扱う．このとき

$$q-n \ge k(k+m), \quad U_1 \ge U^{1-1/k} \ge (2k)^{3k(1+1/(k-1))^m}$$

であるから，補題 8.2 により

$$\begin{aligned}J_{q,k}(U) &\le 2^{4q}U^{2q/k+(3k-5)/2}(4k)^{4(q-k)m}U_1^{2(q-k)-k(k+1)/2+\eta(k,m)}\\&\le 2^{4q}U^{2q/k+(3k-5)/2}(4k)^{4(q-k)m}2^{4(q-k)}U^{(1-1/k)(2q-2k-k(k+1)/2+\eta(k,m)}\\&\le (4k)^{4q(m+1)}U^{2q-k(k+1)/2+\eta(k,m+1)}.\end{aligned}$$

つまり，(8.16) のもとに (8.15) を得る．

次に，条件 (8.16) が成り立たないと仮定する．やはり τ についての帰納法を用いる．定理は $\tau=m$ で成立していると仮定し，

$$q \ge k(k+m+1), \quad U < (2k)^{3k(1+1/(k-1))^{m+1}}$$

なる場合を扱う．自明な不等式

$$J_{q,k}(U) \le U^{2k}J_{q-k,k}(U)$$

に注意する．ここでもしも

$$U \ge (2k)^{3k(1+1/(k-1))^m}$$

であれば，$J_{q-k,k}(U)$ に (8.15) を適用できる．さもなくば，自明な評価を用いる．こうしてやはり

$$J_{q,k}(U) \le (4k)^{4q(m+1)}U^{2(q-k)-k(k+1)/2+\eta(k,m+1)}$$

を得，定理の証明を終わる．

ゼータ和に戻る．定理 8.1 と (7.10) から，次の Vinogradov の評価を得る．

【定理 8.2】

$$\sum_{n\le N} n^{it} \ll N^{1-A(\log N/\log t)^2} \quad (2\le N\le t). \tag{8.17}$$

証明 上記の組み合わせから容易に

$$W(n,t) \ll U^{2+\frac{1}{2}\eta(k,\tau)q^{-2}}t^{-A\delta^2(\log t/\log N)q^{-2}} \qquad (q=k(k+\tau))$$

を得る．但し，U, δ, k は (7.5) を満たす．ここで，

$$U^{\frac{1}{2}\eta(k,\tau)} \le t^{A\delta(1-1/k)^\tau(\log t/\log N)}$$

であるから，δ を適当に定め，充分大きな整数 C について $\tau = Ck$ と置けば，

$$W(n,t) \ll U^2 t^{-A(\log t/\log N)^{-3}}.$$

これを (7.6) に挿入し，部分和法にて (8.17) に至る．

[附記]　補題 8.2 及び 定理 8.1 の証明は Karatsuba (1975) による．定理 8.2 を改良すること，即ち，評価

$$\sum_{n\le N} n^{it} \ll N^{1-A(\log N/\log t)^\omega} \qquad (\omega < 2) \tag{8.18}$$

の証明は長年の課題となっているが，手掛かりは得られていない．

—9—
Vinogradov 素数定理

第 5 節にて導入した仮定 (a) に相当する結果を証明する．

【補題 9.1】

$$\zeta(s) \ll t^{A(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}(\log t)^{\frac{2}{3}} \qquad (\tfrac{1}{2} \le \sigma \le 1;\ t \ge 2). \tag{9.1}$$

証明　表示 (6.11) に部分和法を応用し (8.17) を用いればよい．

【定理 9.1】

$$\zeta(s) \ne 0 \qquad (\sigma > 1 - A(\log t)^{-\frac{2}{3}}(\log\log t)^{-\frac{1}{3}},\ t \ge 3) \tag{9.2}$$

証明 既に第 8 節で述べた様に，この結論を定理 8.2 ないしは上記 (9.1) から導くには二通りの方法がある．ここでは，Landau の着想による証明を示す．

上半平面の充分高い部分にある複素零点 $\eta + i\xi$ をとり，

$$s_1 = \sigma_0 + i\xi, \quad s_2 = \sigma_0 + 2i\xi, \quad \sigma_0 = 1 + c(\log\xi)^{-\frac{2}{3}}(\log\log\xi)^{-\frac{1}{3}}$$

とおく．但し，$c > 0$ は後に定めるべき充分小さな常数とする．また，

$$r(t) = (\log t)^{-\frac{2}{3}}(\log\log t)^{\frac{2}{3}}$$

とする．更に，ρ を一般的に複素零点として

$$f_j(s) = \zeta(s) \prod_{\substack{\rho \\ |\rho - s_j| \le \frac{1}{2}r(\xi)}} (s-\rho)^{-1}$$

とおく．このとき

$$|f_j(s)/f_j(s_j)| \le |\zeta(s)/\zeta(s_j)| < (\log\gamma)^A \qquad (|s - s_j| \le r(\xi))$$

である．実際，円周 $|s - s_j| = r(\xi)$ の上ではこの評価は (9.1) より従う故，円盤上でも成立している．そこで，

$$g_j(s) = \log(f_j(s)/f_j(s_j)) \qquad (g_j(s_j) = 0)$$

とおくと，この函数は円盤 $|s - s_j| \le \frac{1}{2}r(\xi)$ の上で正則，且つ

$$\operatorname{Re} g_j(s) < A \log\log\xi.$$

従って，Borel–Carathéodory の定理により

$$|g_j(s)| < A\log\log\xi \qquad (|s - s_j| \le \tfrac{1}{3}r(\xi)).$$

これより，Cauchy の積分表示を用いて，

$$|g_j'(s)| < Ar(\xi)^{-1}\log\log\xi \qquad (|s - s_j| \le \tfrac{1}{4}r(\xi)).$$

つまり，

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-\sum_{\substack{\rho\\|\rho-s_j|\le\frac12 r(\xi)}}\frac{1}{s-\rho}\right|<Ar(\xi)^{-1}\log\log\xi\quad(|s-s_j|\le\tfrac14 r(\xi)).$$

特に，$\mathrm{Re}(s_j-\rho)>0$ に注意して，

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(s_1)<Ar(\xi)^{-1}\log\log\xi-\frac{1}{\sigma_0-\eta},\\&-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(s_2)<Ar(\xi)^{-1}\log\log\xi\end{aligned}\tag{9.3}$$

を得る．

さて，(3.12) において $\sigma=\sigma_0, t=\xi$ とし，(9.3) により

$$\eta<1-(\sigma_0-1)\frac{1-A(\sigma_0-1)r(\xi)^{-1}\log\log\xi}{3+A(\sigma_0-1)r(\xi)^{-1}\log\log\xi}.$$

ここで，上記の c を定め，証明を終わる．

定理 4.1 と 9.1 を組み合わせ，定理 4.2 と同様にして「Vinogradov の素数定理」を得る．

【定理 9.2】

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x\exp(-A(\log x)^{\frac35}(\log\log x)^{-\frac15})\right).\tag{9.4}$$

[附記]　上記の残余項は現今最良のものである．改良の手掛かりは何ら知られていない．例えば，(8.18) が得られれば勿論その様な改良が従う．定理 9.1 の証明の方針については，[17, pp. 49–53] を参照せよ．初等的，即ち複素函数論によらない証明については [10, 第 4 章] を見よ．なお上記の議論を用いて，(9.2) よりも詳しく，評価

$$\zeta(s)^{-1},\quad\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\ll(\log t)^{\frac23}(\log\log t)^{\frac13}\tag{9.5}$$

を同じ領域にて示すことも可能である．

—10—
Linnik Large Sieve

「零点密度理論」に移る．理論の源は Bohr–Landau (1910) による「Riemann 予想の統計的証左」

$$N(\alpha,T)=O_\alpha(T) \qquad (\alpha>\tfrac{1}{2}) \tag{10.1}$$

にある．つまり，(2.8) と比較して，殆ど全ての複素零点は臨界線の近傍に集中している．この重要な結果を改良することは勿論多くの人々の目的とするところとなり，多様な研究がなされてきた．以下では，その核心部を Halász (1968) の着想をもとにして論述する．

但し，零点密度理論の重要性は，Dirichlet L-函数に拡張されてこそより明らかになる．何故ならば,「Goldbach 予想」をはじめとする古典的な問題の多くは，法が変数である算術級数において素数分布を論じることを要求するからである．なによりも,「L-函数零点密度理論」は Bombieri (1965) 及び Vinogradov, A.I. (1965) による「平均素数定理」という金字塔をもたらした．それは Dirichlet L-函数全てに対して Riemann 予想を拡張して得られる結論と「統計的」には同等なものである．密度予想 (5.12) が想起されるであろう．

彼らの研究の源は Linnik による二つの原理にある．一つは「L 篩」(Large sieve, 1941) であり他は「散乱法」(Dispersion method, 1963) である．Bombieri は前者を，Vinogradov, A.I. は後者を改良して平均素数定理に到達した．とりわけ Bombieri の研究は零点密度理論一般に深い影響を与え，$\zeta(s)$ の理論をも L 篩のもとに統一して論じる気運を生んだのである．

従って L 篩について述べるべきであるが，その一般論は割愛する．算術級数に対する素数分布論は本書の目的外であることが主な理由である．また，現今の L 篩は篩理論の一種としての形容をはなれ，一つの解析的原理ともいうべきものに変化している故，特定の応用例で示すのがよりふさわしいと思われるからでもある．以下は L 篩のその様な一端である．

【補題 10.1】 任意の $T \geq 1$ について

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_n a_n n^{it} \right|^2 dt \ll \sum_n (n+T)|a_n|^2. \tag{10.2}$$

但し，右辺は収束すると仮定する．

証明 より一般的に，三角級数

$$F(x) = \sum_\omega c_\omega e^{i\omega x}$$

の二乗平均を考察する．任意の $\tau > 0$ について，$v(x) = \tau^{-1}$ $(|x| \leq \frac{1}{2}\tau)$，$v(x) = 0$ (その他) とおく．Parseval 等式により，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_\omega c_\omega v(x-\omega) \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)\hat{v}(x)|^2 dx. \tag{10.3}$$

ここに，$\hat{v}(x) = (2/\tau x)\sin(\frac{1}{2}\tau x)$．区間 $[-\pi/\tau, \pi/\tau]$ では $\hat{v}(x) \geq 2/\pi$ である故，

$$\int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} |F(x)|^2 dx \ll \tau^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{|\omega - x| \leq \frac{1}{2}\tau} c_\omega \right|^2 dx \tag{10.4}$$

を得る．そこで，$\tau = \pi/T$，$c_\omega = a_n$ $(\omega = \log n)$ とすれば，

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_n a_n n^{it} \right|^2 dt \ll T^2 \int_0^{\infty} \left| \sum_{x \leq n \leq x\exp(\pi/T)} a_n \right|^2 \frac{dx}{x}. \tag{10.5}$$

これより (10.2) が直ちに従う．

【補題 10.2】 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の定義されている Hilbert 空間内の任意の元 $\underline{a}^{(j)}$ $(1 \leq j \leq J)$ 及び $\underline{b}$ について，次の不等式が成立する．

$$\sum_{j \leq J} \frac{|\langle \underline{b}, \underline{a}^{(j)} \rangle|^2}{\sum_{j' \leq J} |\langle \underline{a}^{(j)}, \underline{a}^{(j')} \rangle|} \leq \|\underline{b}\|^2. \tag{10.6}$$

但し，$\|\underline{b}\| = \sqrt{\langle \underline{b}, \underline{b} \rangle}$ である．系として

$$\sum_{j\le J}|\langle \underline{b},\underline{a}^{(j)}\rangle| \le \|\underline{b}\|\Big(\sum_{j,j'\le J}|\langle \underline{a}^{(j)},\underline{a}^{(j')}\rangle|\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{10.7}$$

$$\sum_{j\le J}|\langle \underline{b},\underline{a}^{(j)}\rangle|^2 \le \|\underline{b}\|^2 \max_{j\le J}\sum_{j'\le J}|\langle \underline{a}^{(j)},\underline{a}^{(j')}\rangle|. \tag{10.8}$$

証明 任意の $\xi_j \in \mathbb{C}$ について

$$\|\underline{b}-\sum_{j\le J}\xi_j\underline{a}^{(j)}\|^2 \ge 0.$$

左辺を展開して

$$\|\underline{b}\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{j\le J}\overline{\xi}_j\langle \underline{b},\underline{a}^{(j)}\rangle + \sum_{j,j'\le J}\xi_j\overline{\xi}_{j'}\langle \underline{a}^{(j)},\underline{a}^{(j')}\rangle \ge 0.$$

この二重和において $|\xi_j\xi_{j'}| \le \frac{1}{2}(|\xi_j|^2+|\xi_{j'}|^2)$ であるから,

$$\|\underline{b}\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{j\le J}\overline{\xi}_j\langle \underline{b},\underline{a}^{(j)}\rangle + \sum_{j\le J}|\xi_j|^2\sum_{j'\le J}|\langle \underline{a}^{(j)},\underline{a}^{(j')}\rangle| \ge 0.$$

ここで,

$$\xi_j = \frac{\langle \underline{b},\underline{a}^{(j)}\rangle}{\sum_{j'\le J}|\langle \underline{a}^{(j)},\underline{a}^{(j')}\rangle|}$$

と置き, (10.6) を得る.

【補題 10.3】 条件

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\, s_j \ge 0, \qquad |\mathrm{Im}\, s_j| \le T \quad (T\ge 2), \\ &|\mathrm{Im}\,(s_j - s_{j'})| \ge 1 \quad (j \ne j' \le J) \end{aligned} \tag{10.9}$$

のもとに, 任意の $c(n)\in\mathbb{C}$, $N\ge 2$ について

$$\sum_{j\le J}\Big|\sum_{N<n\le 2N}c(n)n^{-s_j}\Big|^2 \ll (T+N)\log N\sum_{N<n\le 2N}|c(n)|^2, \tag{10.10}$$

$$\sum_{j\le J}\Big|\sum_{N<n\le 2N}c(n)n^{-s_j}\Big|^2 \ll (N+JT^{\frac{1}{2}}\log T)\sum_{N<n\le 2N}|c(n)|^2. \tag{10.11}$$

証明 部分積分により

$$\sum_{N<n\le 2N} c(n)n^{-s} = (2N)^{-\sigma} \sum_{N<n\le 2N} c(n)n^{-it} + \sigma \int_N^{2N} x^{-\sigma-1} \sum_{N<n\le x} c(n)n^{-it} dx$$

である故，$\mathrm{Re}\, s_j = 0$ $(j \le J)$ と仮定してよい．即ち，$s_j = it_j$ $(t_j \in \mathbb{R}, j \le J)$ とする．先ず，任意の $f \in C^1[0,1]$ について，

$$f(x) = \int_0^1 f(y)dy + \int_0^x yf'(y)dy + \int_x^1 (y-1)f'(y)dy \qquad (0 \le x \le 1).$$

これより不等式

$$|f(\tfrac{1}{2})| \le \int_0^1 \left(|f(x)| + \tfrac{1}{2}|f'(x)|\right) dx \tag{10.12}$$

を得る．そこで，

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x - \tfrac{1}{2} + t_j), \\ F(x) &= \Bigl(\sum_{N<n\le 2N} c(n)n^{-ix}\Bigr)^2 \end{aligned}$$

と置けば，(10.12) から

$$|F(t_j)| \le \int_{t_j-\frac{1}{2}}^{t_j+\frac{1}{2}} \left(|F(t)| + \tfrac{1}{2}|F'(t)|\right) dt.$$

従って，

$$\sum_{j\le J} |F(t_j)| \ll \int_{-T-\frac{1}{2}}^{T+\frac{1}{2}} \left(|F(t)| + |F'(t)|\right) dt.$$

この積分に (10.2) を応用して (10.10) を得る．

次に，$g(x)$ は区間 $[\frac{1}{2}N, \frac{5}{2}N]$ 内に台をもつ C^∞ 級の函数で，区間 $[N, 2N]$ で $g(x) = 1$ 且つ，区間 $[\frac{1}{2}N, N]$，$[2N, \frac{5}{2}N]$ で各々単調増大，減少であるとする．更に，$c(n) = 0$ $(n \notin (N, 2N])$ として，$c(n)$ の定義を変更する．そして，(10.8) において，

$$\underline{b} = (\sqrt{g(n)}c(n)), \qquad \underline{a}^{(j)} = (\sqrt{g(n)}n^{it_j})$$

とし，通常の内積を用いれば，

$$\sum_{j\le J}|F(t_j)| \le \max_{j\le J}\sum_{j'\le J}\left|\sum_n g(n)n^{i(t_j-t_{j'})}\right|\sum_{N<n\le 2N}|c(n)|^2 \tag{10.13}$$

を得る．そこで和

$$g^*(u)=\sum_n g(n)n^{iu} \qquad (u\ge 0)$$

の評価を行わねばならない．函数 g の Mellin 変換を G とすれば，任意の固定された整数 $k\ge 0$ について

$$G(s)\ll N^{\sigma}(1+|s|)^{-k}.$$

これより，先ず，

$$\begin{aligned} g^*(u) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\zeta(s-iu)G(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(i(t-u))G(it)dt + O(N(1+u)^{-k}). \end{aligned}$$

一方，函数等式 (1.15)，Stirling 公式 (3.1) から導かれる漸近式

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}t^{\sigma-\frac12}e^{-\frac12\pi t}(1+O_\sigma(1/t)) \qquad (t\ge 2), \tag{10.14}$$

及び (6.11) から得られる評価 $\zeta(1+it)=O(\log t)$ $(t\ge 2)$ を組み合わせて，$\zeta(it)=O(\sqrt{t}\log t)$ $(t\ge 2)$．従って，

$$g^*(u)\ll N(1+u)^{-k}+(1+u)^{\frac12}\log(2+u).$$

これを，(10.13) に挿入して，(10.11) を得る．

【補題 10.4】 仮定 (10.9) 及び

$$\left|\sum_{N<n\le 2N}c(n)n^{-s_j}\right|\ge V\ge c\sqrt{B} \tag{10.15}$$

のもとに

$$J\ll V^{-2}NB+V^{-6}NT(\log T)^2B^3. \tag{10.16}$$

但し，$c>0$ は充分大きな常数であり，

$$B=\sum_{N<n\le 2N}|c(n)|^2.$$

証明　いま，T_0 を

$$V^2=cT_0^{\frac{1}{2}}(\log T_0)B \qquad (T_0\ge 2)$$

と定める．このとき，長さ T_0 の任意の区間に入る s_j の個数は (10.11) から $O(NB V^{-2})$ である．即ち，

$$J\ll V^{-2}NB(T/T_0+1).$$

これより (10.16) が従う．

[附記]　零点密度理論の歴史は [9] [13] に詳しい．零点密度理論は，Bohr–Landau の発見の後，Carlson (1920)，Ingham (1940) 等によって発展した．しかし，根本的な発展をもたらしたのは Halász (1968) の着想であった．それは Halász–Turán (1969) 及び Montgomery (1969) によって零点密度理論に応用され，一時代を成したのである．彼らの議論の基底は補題 10.2–10.3 にまとめられている．但し，この様な形式に昇華させたのは Selberg である．不等式 (10.6) は彼による．これは Linnik の本来の「Large Sieve」ばかりか,「S 篩」(Selberg Sieve) も含む ([10, 第 1 章])．補題 10.1 あるいはむしろ (10.3)–(10.5) は Gallagaher (1970) による．但し，着想 (10.3) については [17, p. 223] も見よ．有用な (10.12) はときに Sobolev 不等式と呼ばれる．補題 10.4 は Huxley (1972) による．L 篩及び平均素数定理の全体像については [1] を見よ．L 篩が Goldbach 予想を初めとする「加法的素数分布論」に深く関係していることを発見したのは Rényi (1948) である (第 26 節への附記も参照せよ)．それが，平均素数定理への道程の始まりであった．Rényi の貢献は極めて大きい．それ以前に Linnik (1944) は与えられた算術級数中に現われる最小の素数の大きさについて極めて深い結果を得ているが，この研究と Rényi の研究とがその後の L-函数論の方向を定めた．それは「篩法」を如何に L-函数と結合させるか，という命題に要約できる．[10] にて俯瞰せよ．

—11—
4 乗平均

しかし，零点密度理論の眞の基盤は $\zeta(s)$ の「平均値理論」である．これは，

$$M_k(T)=\int_{-T}^{T}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^{2k}dt \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{11.1}$$

の評価，あるいは漸近式を論じるものである．証明は割愛するが，Riemann 予想から「Lindelöf 予想」

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\ll t^{\varepsilon} \qquad (t\geq 2) \tag{11.2}$$

が従う故，

$$M_k(T)\ll T^{1+\varepsilon} \qquad (k\geq 1) \tag{11.3}$$

が期待される訳である．逆に，各 k についての評価 (11.3) は (11.2) の「統計的な証左」であり，従って，遠隔ながら Riemann 予想を支持するものと言える．零点密度理論はこの様な関係を量的に，つまり $N(\alpha,T)$ に反映させる方法の体系である．

現在，Euler 積表示 (1.2) を半平面 $\sigma<1$ で用いることは殆ど不可能である．何故ならば，それは対数微分 $(\zeta'/\zeta)(s)$ の全ての特異点が決定されているのと同義であるからである．即ち，複素零点についての情報なくして用いることができるのは，表示 (1.1) に限られる，としても過誤はない．そこで，Riemann 予想の帰結 (11.2) を支持する何らかの事実を (1.1) から導くことが求められる．積分 (11.1) は表示 (1.1) を通して議論できる故,「統計的な証左」に限るならば，$M_k(T)$ を考察するのは当然なこととなる．だが勿論，$M_k(T)$ を論じることはやはり新たな困難を呼び起こす．現在最良の結果は $M_2(T)$，つまり「4 乗平均」に対する漸近式であり，$k\geq 3$ については殆ど何も知られていないに等しい (但し，第 15 節を見よ)．それ故，4 乗平均は $\zeta(s)$ の種々の応用に当たって最も基本的な手段となっている．ここでは，零点密度理論への応用に必要な最小限の結果を示そう．実は，4 乗平均

のより構造的な意味は，Riemann が描いた幾何学を背景として $\zeta(s)$ を観るための手段となることにあるが，これは後に詳説する．

【定理 11.1】 充分大きな $T>0$ について

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\eta+it)|^4dt \ll T(\log T)^6 \qquad (|\eta-\tfrac{1}{2}|\le(\log T)^{-1}). \tag{11.4}$$

証明　等式 (1.5) $(k=2)$ から，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\zeta^2(w+\xi)\Gamma(w)T^w dw=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^{\xi}}e^{-n/T} \qquad (\xi=\eta+it).$$

積分路を $\mathrm{Re}\,w=-\frac{3}{4}$ に移して，

$$\zeta^2(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^{\xi}}e^{-n/T}-R(t,T)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\frac{3}{4})}\zeta^2(w+\xi)\Gamma(w)T^w dw. \tag{11.5}$$

但し，$R(t,T)$ は極 $w=1-\xi$ における留数である．函数 $\zeta(s)$ の函数等式を $\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s)$ と書けば，この積分項は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\frac{3}{4})}\chi^2(w+\xi)\Gamma(w)T^w\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}dw$$

に等しい．無限和を $n=[T]$ で分割し，$n<T$ なる部分については積分路を $\mathrm{Re}\,w=a$ $(a=-(\log T)^{-1})$，$n\ge T$ なる部分については $\mathrm{Re}\,w=b$ $(b=-\frac{1}{2}-2(\log T)^{-1})$ に移動する．即ち，(11.5) の積分項は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\chi^2(w+\xi)\Gamma(w)T^w\sum_{n<T}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}dw$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(b)}\chi^2(w+\xi)\Gamma(w)T^w\sum_{n\ge T}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}dw$$

に等しい．評価 (10.14) により，前者では $\chi^2(w+\xi)\Gamma(w)T^w=O(e^{-|w|}\log T)$，後

者では同じ因子は $O(e^{-|w|}T^{\frac{1}{2}})$ である．従って，(11.5) より

$$|\zeta(\xi)|^2 \ll e^{-|\xi|}T^{\frac{1}{2}}\log T + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^{\xi}}e^{-n/T}\right|$$
$$+\log T\int_{(a)}\left|\sum_{n<T}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}\right|e^{-|w|}|dw| + T^{\frac{1}{2}}\int_{(b)}\left|\sum_{n\geq T}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}\right|e^{-|w|}|dw|$$

を得る．これより，(11.4) の左辺は

$$\ll T\log^2 T + \int_{-T}^{T}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^{\xi}}e^{-n/T}\right|^2 dt$$
$$+\log^2 T\int_{(a)}e^{-|w|}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n<T}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}\right|^2 dt|dw|$$
$$+T\int_{(b)}e^{-|w|}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n\geq T}\frac{d(n)}{n^{1-w-\xi}}\right|^2 dt|dw| \quad (\xi = \tfrac{1}{2}+it).$$

変数 t についてのこれらの積分に補題 10.1 を適用し，その結果を補題 1.2 (k, $l = 2$) によって評価すれば，(11.4) を得る．

【補題 11.1】 仮定

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_j)| \geq V > 0,$$
$$|t_j| \leq T \quad (1 \leq j \leq J), \quad |t_j - t_{j'}| \geq 1 \quad (j \neq j')$$

のもとに

$$J \ll TV^{-4}\log^7 T. \tag{11.6}$$

証明 不等式 (10.12) を用いて

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_j)|^4 \ll \int_{t_j-\frac{1}{2}}^{t_j+\frac{1}{2}}\left(|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4 + |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^3|\zeta'(\tfrac{1}{2}+it)|\right)dt.$$

従って,

$$V^2J \ll \int_{-T}^{T}|\zeta(\tfrac12+it)|^4dt+\left(\int_{-T}^{T}|\zeta(\tfrac12+it)|^4dt\right)^{\frac34}\left(\int_{-T}^{T}|\zeta'(\tfrac12+it)|^4dt\right)^{\frac14}.$$

第 3 積分は ζ' を Cauchy 積分で表示して (11.4) を用いれば, $O(T\log^{10}T)$. これより (11.6) を得る.

[附記] 「平均値理論」全般については [6] [17, 第 7 章] を見よ. Lindelöf 予想は [17, 第 13 章] に詳しい. 定理 11.1 の証明は Ramachandra (1975) による. 漸近式

$$M_2(T)=\pi^{-2}T\log^4T+O(T\log^3T) \tag{11.7}$$

を証明すべく改良することは可能である. この結果自体は Ingham (1926) による. 彼は Hardy–Littlewood (1929) による $\zeta^2(s)$ の近似函数等式を援用した. Ramachandra の着想は近似函数等式を不用とした.

—12—
零点密度評価

以上の準備のもとに零点密度理論に戻る. この理論は「存在しないと予想される集合」の元, 即ち, Riemann 予想を否定する複素零点, の個数を評価することを目的とする. そこで, 複素零点を検出する手段が望まれるが, 当然, それは「統計的には小」である表現を伴うものでなければならない.

このために,

$$M(s)=\sum_{n\le X}\mu(n)n^{-s}\qquad(X\ge 2) \tag{12.1}$$

とおく．Möbius 函数の基本性質から

$$M(s,X)\zeta(s)=1+\sum_{n>X}a(n)n^{-s}\qquad(\sigma>1),\tag{12.2}$$

$$a(n)=\sum_{\substack{d|n\\ d\le X}}\mu(d).$$

これより容易に，任意の複素零点 $\rho=\beta+i\gamma$ $(\beta>\frac{1}{2})$ と任意の $Y\ge 2$ について

$$-\sum_{n>X}a(n)n^{-\rho}e^{-n/Y}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}M(s+\rho)\zeta(s+\rho)\Gamma(s)Y^s ds=e^{-1/Y}$$

を得る．被積分函数は原点で正則であることに注意して，積分路を垂直線 $\sigma=\frac{1}{2}-\beta$ に移し

$$W_1(\rho)+W_2(\rho)=e^{-1/Y}\tag{12.3}$$

を得る．但し，

$$W_1(\rho)=-\sum_{n>X}a(n)n^{-\rho}e^{-n/Y},$$

$$W_2(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}M(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+t))\zeta(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+t))\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta+it)Y^{\frac{1}{2}-\beta+it}dt.$$

等式 (12.3) により $|W_1(\rho)|\ge\frac{1}{4}$ かあるいは $|W_2(\rho)|\ge\frac{1}{4}$ である．以下で，W_j は共に「統計的には小」であることを確かめ，その結果として次の零点密度評価を得る．

【定理 12.1】

$$N(\alpha,T)\ll T^{D(\alpha)(1-\alpha)}\log^A T,$$

$$D(\alpha)\le\min\left\{\frac{3}{2-\alpha},\frac{5\alpha-3}{\alpha^2+\alpha-1}\right\}\quad(\tfrac{1}{2}\le\alpha\le 1).\tag{12.4}$$

証明　先ず，(2.8) により $\alpha\ge\frac{1}{2}+(\log T)^{-1}$ としてよい．また，$T^\epsilon\le X\le Y\le T^A$ と仮定する．勿論，T は充分大きいものとする．このとき，W_1，W_2 の表示を短

縮して

$$|U_1(\rho)| + |U_2(\rho)| \geq \tfrac{1}{2},$$

$$U_1(\rho) = -\sum_{X<n\leq Y\log^2 T} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y},$$

$$U_2(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} M(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+t))\zeta(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+t))\Gamma(\tfrac{1}{2}-\beta+it)Y^{\frac{1}{2}-\beta+it}dt.$$

次に，$\mathcal{R}$ は領域 $\{\alpha \leq \sigma \leq 1, T \leq t \leq 2T\}$ 内の複素零点の代表元集合で，$\mathcal{R} \ni \rho, \rho'$ $(\rho \neq \rho')$ であれば $|\rho - \rho'| \geq \log^3 T$ となるものとする．評価 (3.18) により

$$N(\alpha, 2T) - N(\alpha, T) \ll |\mathcal{R}| \log^4 T. \tag{12.5}$$

更に，条件 $|U_\nu(\rho)| \geq \frac{1}{4}$ $(\nu = 1, 2)$ を満たす $\mathcal{R}$ の部分集合を $\mathcal{R}_\nu$ とする．

さて，(10.10) により

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_1| &\ll \sum_{\rho\in\mathcal{R}_1} |U_1(\rho)|^2 \\ &\ll \log^3 T \max_{X\leq N\leq Y\log^2 T}(N+T)e^{-N/Y}\sum_{N<n\leq 2N} d^2(n) n^{-2\alpha} \\ &\ll (Y^{2(1-\alpha)} + TX^{1-2\alpha})\log^7 T. \end{aligned} \tag{12.6}$$

また

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_2| &\ll (Y^{\frac{1}{2}-\alpha}\log T)^{\frac{4}{3}} \sum_{\rho\in\mathcal{R}_1}\left(\int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+t))M(\tfrac{1}{2}+i(\gamma+t))|dt\right)^{\frac{4}{3}} \\ &\ll Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\alpha}\log^2 T \int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)M(\tfrac{1}{2}+it)|^{\frac{4}{3}}dt\end{aligned}$$

である故，

$$|\mathcal{R}_2| \ll Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\alpha}\log^2 T \left(\int_T^{2T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4 dt\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_T^{2T} |M(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt\right)^{\frac{2}{3}}.$$

補題 10.1 及び定理 11.1 を援用して

$$|\mathcal{R}_2| \ll T^{\frac{1}{3}}(X+T)^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\alpha}\log^5 T. \tag{12.7}$$

評価 (12.5)–(12.7) をまとめ，$X = T$，$Y = T^{3/(4-2\alpha)}$ とおき，

$$D(\alpha) \le \frac{3}{2-\alpha} \tag{12.8}$$

を得る．

次に，補題 10.4 及び 11.1 を用いて $|\mathcal{R}_\nu|$ の評価を行おう．勿論，X, Y は新たに定められるべきものとする．任意の $N \in [X, Y \log^2 T]$ について

$$\mathcal{R}_1(N) = \left\{\rho \in \mathcal{R}_1 : \sum_{N<n\le 2N} a(n) n^{-\rho} e^{-n/Y} \gg (\log T)^{-1}\right\}$$

とすれば，

$$|\mathcal{R}_1| \ll (\log T) \max_N |\mathcal{R}_1(N)|.$$

条件 (10.15) を考慮して，仮定

$$X^{2\alpha-1} \gg \log^5 T \tag{12.9}$$

のもとに

$$|\mathcal{R}_1(N)| \ll (N^{2(1-\alpha)} + N^{4-6\alpha} T) e^{-N/Y} \log^{17} T.$$

そこで，$\alpha > \frac{2}{3}$ であれば，(12.9) も満たされ，

$$|\mathcal{R}_1| \ll (Y^{2(1-\alpha)} + X^{4-6\alpha} T) \log^{18} T. \tag{12.10}$$

集合 $\mathcal{R}_2$ に移るが，各 $\rho \in \mathcal{R}_2$ に対して

$$|\zeta(\tfrac{1}{2} + it_\rho) M(\tfrac{1}{2} + it_\rho)| \gg Y^{\alpha-\frac{1}{2}} (\log T)^{-1} \quad (|\gamma - t_\rho| \le \log^2 T)$$

となる t_ρ が存在する．そこで，$Z > 0$ は後に定めるべきものとして

$$\mathcal{R}_{21} = \{\rho \in \mathcal{R}_2; |\zeta(\tfrac{1}{2} + it_\rho)| > Z\}, \qquad \mathcal{R}_{22} = \mathcal{R}_2 \backslash \mathcal{R}_{21}$$

とおく．補題 11.1 により

$$|\mathcal{R}_{21}| \ll Z^{-4} T \log^7 T. \tag{12.11}$$

一方，$\rho \in \mathcal{R}_{22}$ ならば

$$|M(\tfrac{1}{2} + it_\rho)| \gg Z^{-1} Y^{\alpha-\frac{1}{2}} (\log T)^{-1}$$

であるから，仮定

$$Y^{\alpha-\frac{1}{2}} \gg Z \log^2 T \tag{12.12}$$

のもとに，補題 10.4 により

$$|\mathcal{R}_{22}| \ll (Z^2 Y^{1-2\alpha} + Z^6 Y^{3-4\alpha} T) X \log^{11} T. \tag{12.13}$$

ここで，$Z = X^{-\frac{1}{10}} Y^{\frac{3}{10}(2\alpha-1)}$ とおく．上記 (12.10) での仮定 $\alpha > \frac{2}{3}$ に注意して，(12.12) は満たされているものとしてよい．従って，(12.10)，(12.11)，(12.13) をまとめて

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}| \ll (&Y^{2(1-\alpha)} + X^{4-6\alpha} T \\ &+ X^{\frac{4}{5}} Y^{-\frac{2}{5}(2\alpha-1)} + X^{\frac{2}{5}} Y^{-\frac{6}{5}(2\alpha-1)} T) \log^{18} T \qquad (\alpha > \tfrac{2}{3}).\end{aligned}$$

右辺の最適化は

$$\begin{aligned}\log X &= \tfrac{1}{2}(2\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1)^{-1} \log T, \\ \log Y &= \tfrac{1}{2}(5\alpha - 3)(\alpha^2 + \alpha - 1)^{-1} \log T\end{aligned}$$

によって得られる．これより

$$D(\alpha) \le \frac{5\alpha - 3}{\alpha^2 + \alpha - 1} \qquad (\alpha > \tfrac{2}{3}).$$

評価 (12.8) と組み合わせて (12.4) の証明を終わる．

定理 5.1 及び 12.1 の帰結として「Huxley の素数定理」を得る．

【定理 12.2】

$$\pi(x+h) - \pi(x) = (1 + o(1)) \frac{h}{\log x} \qquad (x^{\frac{7}{12}+\varepsilon} < h < x). \tag{12.14}$$

[附記]　評価 (12.8) は Ingham (1940) によるが，彼の証明は上記とは異なる．定理 12.1 そのものは Huxley (1972) による．定理 12.2 における「Huxley の指数 $\frac{7}{12}$」は現今最良である．上記の議論を分析すれば明らかとなるが，定理 11.1 がこの限界の主たる理由である．つまり，例えば，(11.3) ($k = 3$) を証明することができたならば，定理 12.2 は改良可能である.「平均値理論」の発展が望まれる所以である．

しかしながら

$$\pi(x+h)-\pi(x)>C\frac{h}{\log x}$$

なる「下からの評価」を考えるならば指数 $\frac{7}{12}$ は実際に改良できる．これは Iwaniec–Jutila (1979) によって示された．彼らは，零点密度理論と「組み合わせ論的篩法」を融合させて壁を打ち破ったのである．詳細は [10] を見よ．なお，評価 (12.4) には様々な改良が加えられている．これについては，例えば [5] を見よ．

—13—
Atkinson

平均値理論を続ける．そのために，新たに「重み付き平均値」

$$\mathcal{Z}_k(g)=\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^{2k}g(t)dt \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{13.1}$$

を導入し，本節と次節で $k=1$ の場合を詳述する．但し，重み $g(z)$ は条件

(1) $g(z)\in\mathbb{R}$ $(z\in\mathbb{R})$,

(2) 充分大きな常数 E があって $g(z)$ は領域 $|\mathrm{Im}\,z|\le E$ で正則，且つ $O((|z|+1)^{-E})$

を満たすものとする．従って，以下の議論に現われる残余項等は全て E と関係している．

先ず，

$$\mathcal{I}(u,v;g)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u+it)\zeta(v-it)g(t)dt \qquad (\mathrm{Re}\,u,\ \mathrm{Re}\,v>1) \tag{13.2}$$

とおく．積分路を $\mathrm{Im}\,t=\pm\frac{1}{2}E$ に移動して $\mathcal{I}(u,v;g)$ は領域

$$|u|,\ |v|<E_0 \qquad (E_0=cE) \tag{13.3}$$

に有理型函数として接続できることが解る．但し，$c>0$ は充分小さいが，E_0 は充分大きいものとする．以下この領域で考察する．特に $\mathrm{Re}\,u, \mathrm{Re}\,v<1$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u,v;g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u+it)\zeta(v-it)g(t)dt \\ &\quad + 2\pi\zeta(u+v-1)\{g((u-1)i)+g((1-v)i)\}\end{aligned} \tag{13.4}$$

であることは見やすい．これより $0<\alpha<1$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\alpha+it)|^2 g(t) = \mathcal{I}(\alpha,\alpha;g) - 4\pi\zeta(2\alpha-1)\mathrm{Re}\{g((\alpha-1)i)\}. \tag{13.5}$$

即ち，

$$\mathcal{Z}_1(g) = \mathcal{I}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};g) + 2\pi\mathrm{Re}\{g(\tfrac{1}{2}i)\}. \tag{13.6}$$

一方，(13.2) に (1.1) を用いて,「分割」

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u,v;g) &= \Big\{\sum_{m=n}+\sum_{m<n}+\sum_{m>n}\Big\}m^{-u}n^{-v}\hat{g}(\log(n/m)) \\ &= \zeta(u+v)\hat{g}(0)+\mathcal{I}_1(u,v;g)+\overline{\mathcal{I}_1(\overline{v},\overline{u};g)}\end{aligned} \tag{13.7}$$

を導入する．但し，

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{i\xi t}dt. \tag{13.8}$$

函数 $\mathcal{I}_1(u,v;g)$ を領域 (13.3) に接続するために，Mellin 変換

$$\tilde{g}(s,\lambda) = \int_0^{\infty}y^{s-1}(1+y)^{-\lambda}\hat{g}(\log(1+y))dy \tag{13.9}$$

を必要とする．次の事実は本節と共に後にも重要である．

【補題 13.1】　函数 $\tilde{g}(s,\lambda)/\Gamma(s)$ は二変数正則函数として領域

$$|\mathrm{Re}\,s| \le \tfrac{1}{3}E, \quad |\mathrm{Re}\,\lambda| \le \tfrac{1}{3}E \tag{13.10}$$

に接続される．また，この領域にて λ は有界に止まり s は無限遠に向かう

とき,

$$\tilde{g}(s,\lambda) \ll |s|^{-\frac{1}{2}E}. \tag{13.11}$$

証明 表示 (13.8)–(13.9) より,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(s,\lambda) &= \int_0^\infty y^{s-1}(1+y)^{-\lambda} \int_{-\infty+Ei}^{\infty+Ei} g(t)(1+y)^{it} dt dy \\ &= \Gamma(s) \int_{-\infty+Ei}^{\infty+Ei} \frac{\Gamma(\lambda-it-s)}{\Gamma(\lambda-it)} g(t) dt. \end{aligned} \tag{13.12}$$

よって,前段は自明であろう.後段については表示

$$\begin{aligned}\tilde{g}(s,\lambda) &= \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+\nu-1)} \int_0^\infty \frac{y^{s+\nu-1}}{(1+y)^{\lambda+\nu}} \\ &\times \int_{-\infty+Ei}^{\infty+Ei} (\lambda-it)(\lambda-it+1)\cdots(\lambda-it+\nu-1) g(t)(1+y)^{it} dt dy\end{aligned}$$

において $\nu = [E/2]+1$ とすればよい.

等式 (13.7) に戻るが,Mellin 逆変換

$$(1+y)^{-\lambda}\hat{g}(\log(1+y)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \tilde{g}(s,\lambda) y^{-s} ds \qquad (y>0) \tag{13.13}$$

において $y = n/m$ とし m, n について加えれば

$$\mathcal{I}_1(u,v;g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \zeta(s)\zeta(u+v-s)\tilde{g}(s,v) ds \qquad (\mathrm{Re}(u+v) > 3)$$

を得る.積分路を $\mathrm{Re}\, s = 3E_0$ に移して,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1(u,v;g) &= \zeta(u+v-1)\tilde{g}(u+v-1,v) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{(3E_0)} \zeta(s)\zeta(u+v-s)\tilde{g}(s,v) ds.\end{aligned}$$

函数等式 (1.15) を援用してから (1.6) を用いて,

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}_1(u,v;g) = \zeta(u+v-1)\tilde{g}(u+v-1,v) \\ &-2i(2\pi)^{u+v-2} \sum_{n=1}^\infty \sigma_{u+v-1}(n) \int_{(3E_0)} (2\pi n)^{-s} \sin\left(\tfrac{1}{2}(u+v-s)\pi\right) \\ &\qquad\qquad \times \Gamma(s+1-u-v)\tilde{g}(s,v) ds.\end{aligned} \tag{13.14}$$

ここで必要とされる絶対収束性は (10.14) と上記の $\tilde{g}$ の評価から明らかである．

式 (13.5)，(13.7)，(13.14) を組み合わせ，任意の $0<\alpha<1$ について

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\alpha+it)|^2g(t)dt=\zeta(2\alpha)\hat{g}(0)$$

$$+2\zeta(2\alpha-1)\mathrm{Re}\{\tilde{g}(2\alpha-1,\alpha)\}-4\pi\zeta(2\alpha-1)\mathrm{Re}\{g((\alpha-1)i)\}$$

$$+4(2\pi)^{2\alpha-2}\mathrm{Im}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2\alpha-1}(n)\int_{(2)}(2\pi n)^{-s}\sin(\tfrac{1}{2}(2\alpha-s)\pi)$$

$$\times\Gamma(s+1-2\alpha)\tilde{g}(s,\alpha)ds\Big] \tag{13.15}$$

を得る．右辺の積分を変形するために，

$$P_{\pm}(\delta)=\frac{1}{2i}\int_{(2)}(2\pi n)^{-s}e^{\pm\frac{1}{2}\pi i(2\alpha-s)}\Gamma(s+1-2\alpha)\widetilde{g_\delta}(s,\alpha)ds$$

を考察する．但し，$g_\delta(t)=e^{-\delta t^2}g(t)$ $(\delta\ge 0)$．関係式

$$\lim_{\delta\to 0^+}\big(P_+(\delta)-P_-(\delta)\big)$$

$$=\int_{(2)}(2\pi n)^{-s}\sin\big(\tfrac{1}{2}\pi(2\alpha-s)\big)\Gamma(1-2\alpha)\tilde{g}(s,\alpha)ds \tag{13.16}$$

を示すのは容易である．そして，仮定 $\delta>0$ 及び $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ のもとに，

$$P_+(\delta)=\frac{e^{\pi i\alpha}}{2i}\int_{(2)}(2\pi n)^{-s}e^{-\frac{1}{2}\pi is}\Gamma(s+1-2\alpha)$$

$$\times\int_0^{e^{i\theta}\infty}y^{s-1}(1+y)^{-\alpha}\widehat{g_\delta}(\log(1+y))dyds$$

と書けることも見やすい．この二重積分は絶対収束している故，積分の順序を交換し，多少の計算の後に

$$P_+(\delta)=i\pi(2\pi n)^{1-2\alpha}\int_0^{\infty}(y(1+y))^{-\alpha}e(-ny)\widehat{g_\delta}(\log(1+1/y))dy$$

を得る．部分積分を行えば解るが，右辺は $\delta\ge 0$ で一様に収束している．同様の変形を $P_-(\delta)$ についても行い，結果を (13.16) に挿入し，(13.14) から任意の

$0<\alpha<1$ につき

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\alpha+it)|^2 g(t)dt$$
$$=\zeta(2\alpha)\hat{g}(0)+2\zeta(2\alpha-1)\mathrm{Re}\{\tilde{g}(2\alpha-1,\alpha)\}-4\pi\zeta(2\alpha-1)\mathrm{Re}\{g((\alpha-1)i)\}$$
$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1-2\alpha}(n)\int_0^{\infty}(y(y+1))^{-\alpha}\cos(2\pi ny)\mathrm{Re}\{\hat{g}(\log(1+1/y))\}dy.$$

特に，(1.13)，(3.3)，(3.7)，(13.12) を参照し $\alpha=\frac{1}{2}$ として，次の基本的な等式を得る．

【定理 13.1】 函数 g が上記の条件を満たすとき，

$$\mathcal{Z}_1(g)=\{\mathcal{Z}_{1,r}+\mathcal{Z}_{1,v}\}(g). \tag{13.17}$$

但し，

$$\mathcal{Z}_{1,r}(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\mathrm{Re}\Big\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it)\Big\}+2c_E-\log(2\pi)\Big]g(t)dt+2\pi\mathrm{Re}\{g(\tfrac{1}{2}i)\},$$

$$\mathcal{Z}_{1,v}(g)=4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)\int_0^{\infty}(y(y+1))^{-\frac{1}{2}}g_c(\log(1+1/y))\cos(2\pi ny)dy,$$

$$g_c(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cos(xt)dt.$$

[附記] 上記は [12, pp. 145–150] を簡略したものである．分割 (13.7) は Atkinson (1949) の着想である．先に述べた Weyl の着想 (6.4) を $\zeta(s)$ の表示 (1.1) のもとで捉えたもの，と見られよう．実は,「Atkinson 分割」の背後にはモジュラー群が控えているのであるが，後に詳述する．

—14—
2 乗 平 均

次に，(13.17) を函数

$$g(z) = (\sqrt{\pi}G)^{-1}\exp(-((z-T)/G)^2) \tag{14.1}$$

にて特殊化する．ここに変数 T，G は充分大とする．そして $\mathcal{Z}_1(g) = I_1(T,G)$ と書くことにする．勿論，

$$I_1(T,G) = (\sqrt{\pi}G)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+i(T+t))|^2\exp(-(t/G)^2)dt. \tag{14.2}$$

また，

$$g_c(x) = \exp(-\tfrac{1}{4}(Gx)^2)\cos(Tx) \tag{14.3}$$

であるから，

$$\begin{aligned} &I_1(T,G)\\ &=(\sqrt{\pi}G)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{Re}\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}+i(T+t))\right\}+2c_E-\log(2\pi)\right]\exp(-(t/G)^2)dt\\ &+4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)Q(n;T,G)+2\sqrt{\pi}G^{-1}\cos(TG^{-2})\exp(-G^{-2}(T^2-\tfrac{1}{4})). \end{aligned} \tag{14.4}$$

但し，

$$\begin{aligned} Q(n;T,G) = \int_0^{\infty}&(y(y+1))^{-\frac{1}{2}}\cos(T\log(1+1/y))\cos(2\pi ny)\\ &\times\exp(-\tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y))^2)dy. \end{aligned} \tag{14.5}$$

以下，

$$T^{\varepsilon} < G < T^{1-\varepsilon} \tag{14.6}$$

なる条件のもとに $Q(n;T,G)$ を考察する．

このために

$$Q(n;T,G)=Q_+(n;T,G)+Q_-(n;T,G) \tag{14.7}$$

と分解する．ここに，

$$Q_\pm(n;T,G)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^\infty (y(y+1))^{-\frac{1}{2}}\exp\bigl(2\pi iny\pm Ti\log(1+1/y)\bigr)$$
$$\times\exp\bigl(-\tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y))^2\bigr)dy.$$

任意の $A>0$ について評価

$$Q_-(n;T,G)\ll (nT)^{-A} \tag{14.8}$$

を示すことは容易である．実際，$\theta>0$ は充分小として積分路を $[0, e^{i\theta}\infty)$ に移動すれば済む．一方，$Q_+(n;T,G)$ に対しては鞍点法を援用する．鞍点 $y=y_0$ は $y_0(y_0+1)=T/(2\pi n)$ を満たす故，

$$y_0=-\tfrac{1}{2}+\bigl(T/(2\pi n)+\tfrac{1}{4}\bigr)^{\frac{1}{2}}. \tag{14.9}$$

そこで，積分路を折線 $L_1\cup L_2\cup L_3$ に移動する．但し，$\theta>0$ は充分小にとり，

$$L_1=[0,\, y_0(1-e^{\frac{1}{4}\pi i}r_+)],$$
$$L_2=[y_0(1-e^{\frac{1}{4}\pi i}r_+),\, y_0(1+e^{\frac{1}{4}\pi i}r_-)],$$
$$L_3=[y_0(1+e^{\frac{1}{4}\pi i}r_-), e^{\theta i}\infty) \qquad \bigl(r_\pm=\sqrt{2}\tan\theta/(1\pm\tan\theta)\bigr).$$

線分 L_1 上では $y=x(1-e^{\frac{1}{4}\pi i}r_+)$ $(0\le x\le y_0)$ と置いて，

$$\mathrm{Re}\Bigl\{2\pi iny+Ti\log(1+1/y)-\tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y))^2\Bigr\}$$
$$=\frac{r_+}{\sqrt{2}}\bigl(2\pi nx-T/(1+x)\bigr)-\frac{x+\frac{1}{2}}{(1+x)^2}r_+^2T(1+O(\theta))$$
$$-\tfrac{1}{4}(G\log(1+1/x))^2(1+O(\theta))$$

であるが y_0 の定め方から，これは

$$<-\frac{y_0+\frac{1}{2}}{(1+y_0)^2}r_+^2T(1+O(\theta)).$$

従って，$Q_+(n;T,G)$ において

$$\int_{L_1} \ll (nT)^{-A}. \tag{14.10}$$

同様にして

$$\int_{L_3} \ll (nT)^{-A}. \tag{14.11}$$

次に，線分 L_2 上では $y = y_0(1+e^{\frac{1}{4}\pi i}r)$ $(-r_+ \le r \le r_-)$ と変数を変換する．先ず，因子 $\exp(-\frac{1}{4}(G\log(1+1/y))^2)$ の効果により，$\log(1+1/y_0) \ll G^{-1}\log T$ となる場合のみを考察すればよい．さもなければ，L_2 上の積分は容易に (14.10) と同じく評価されるからである．つまり，$n \ll TG^{-2}(\log T)^2$ $(y_0 \approx (T/n)^{\frac{1}{2}} \gg G/\log T)$ と仮定して考察を進めてよい．特に，(14.6) よりも限定的に $T^\varepsilon < G < T^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ としてよい．このとき，L_2 上では

$$\begin{aligned}
&2\pi i n y + Ti\log(1+1/y) - \tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y))^2\\
&= 2\pi i n y_0 + Ti\log(1+1/y_0) - \tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y_0))^2 - \frac{y_0+\frac{1}{2}}{(y_0+1)^2}Tr^2\\
&\qquad +c_1r + c_2r^2 + c_3r^3 + O\big((Tn)^{\frac{1}{2}}r^4\big).
\end{aligned}$$

ここに，c_j は n，T の函数で $c_1, c_2 = O(\log^2 T)$，$c_3 = O((nT)^{\frac{1}{2}})$ である．右辺の第 4 項にて $(y_0+\frac{1}{2})(1+y_0)^{-2}T \approx (nT)^{\frac{1}{2}}$ であるから，更に $|r| < (nT)^{-\frac{1}{5}}$ と仮定できる．線分 L_2 の $|r| \ge (nT)^{-\frac{1}{5}}$ に対応する部分での積分は $O(\exp(-(nT)^{\frac{1}{10}})))$ と評価されるからである．これらの仮定のもとに，

$$\begin{aligned}
&(y(y+1))^{-\frac{1}{2}}\exp\big(2\pi i n y + Ti\log(1+1/y) - \tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y))^2\big)\\
&= (y_0(y_0+1))^{-\frac{1}{2}}\exp\big(2\pi n y_0 + Ti\log(1+1/y_0) - \tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y_0))^2\big)\\
&\times\exp\big(-(y_0+\tfrac{1}{2})(1+y_0)^{-2}Tr^2\big)\big\{1+c_1'r+c_2'r^2+c_3'r^3+O((nT)^{\frac{1}{2}}r^4)\big\}.
\end{aligned}$$

但し，$c_1' = O(\log^2 T)$，$c_2' = O(\log^4 T)$，$c_3' = O((nT)^{\frac{1}{2}}\log^2 T)$．即ち，

$$\begin{aligned}
\int_{L_2} &= e^{\frac{1}{4}\pi i}\left(\frac{\pi y_0(1+y_0)}{T(y_0+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\big(2\pi n y_0 + Ti\log(1+1/y_0)\big)\\
&\quad\times\exp\big(-\tfrac{1}{4}(G\log(1+1/y_0))^2\big)\big(1+O((nT)^{-\frac{1}{2}}\log^4 T)\big).
\end{aligned} \tag{14.12}$$

以上 (14.7)–(14.12) をまとめ，多少の整理の後に (14.4) から次の結果を得る．

【定理 14.1】 条件 $T^{\varepsilon} \le G \le T^{1-\varepsilon}$ $(T \ge 2)$ のもとに

$$I_1(T,G) = \log(T/(2\pi)) + 2c_E + 2\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}d(n)}{(2\pi nT+\pi^2n^2)^{\frac14}}\sin(F(T,n))$$
$$\times\exp(-(G\operatorname{arcsinh}((\pi n/(2T))^{\frac12}))^2) + O(T^{-\frac12}\log^6 T). \qquad (14.13)$$

但し，

$$F(T,n) = 2T\operatorname{arcsinh}((\pi n/(2T))^{\frac12}) + (2\pi nT+\pi^2n^2)^{\frac12} - \tfrac14\pi.$$

[附記] Atkinson (1949) は平均値 $M_1(T)$ に対して (14.13) に相当する漸近展開を証明している．今日それを「Atkinson 公式」と呼ぶ．彼の議論では Poisson 和公式と共に「Voronoi 公式」

$$\sum_{n\le x} d(n) = x(\log x + 2c_E - 1) - \tfrac14$$
$$-2\pi^{-1}x^{\frac12}\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-\frac12}\Big(K_1(4\pi(nx)^{\frac12}) + \tfrac12\pi Y_1(4\pi(nx)^{\frac12})\Big) \qquad (14.14)$$

が重要である．但し，左辺において x が整数のときは，$d(x)$ の代わりに $\frac12 d(x)$ を加えるものとする．上記ではこの困難な公式の使用を省き議論を簡明にしてある．漸近展開 (14.13) は Atkinson 公式を「局所化」したものと考えられ，応用上はほぼ同等である．

なお，(14.14) の無限和は有界収束している．従って，補題 1.2 と同様にして次の変換式を示すことができる．

$$\sum_{a\le n\le b}{}' d(n)f(n) = \int_a^b (\log x + 2c_E)f(x)dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\int_a^b (4K_0(4\pi x^{\frac12}) - 2\pi Y_0(4\pi x^{\frac12}))f(x)dx. \qquad (14.15)$$

これを「Voronoi 和公式」と呼ぶ．Voronoi 公式，Atkinson 公式の証明やその帰結等については [5] [11] を見よ．

—15—
12 乗平均

定理 14.1 の応用の一つとして $M_6(T)$ の評価を導く.

【補題 15.1】 固定された任意の整数 $k \geq 1$ 及び任意の $\frac{1}{2}T \leq t \leq T$ $(T \geq 2)$ について,

$$\zeta^k(\tfrac{1}{2}+it) \ll \log T + \log T \int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+i(t+u))|^k e^{-|u|} du. \tag{15.1}$$

証明　頂点 $z = \pm\eta \pm i\log^2 T$ $(\eta = (\log T)^{-1})$ なる長方形の周上に沿って $\zeta^k(\frac{1}{2}+it+z)\Gamma(z)$ を積分する. 上下の水平線分上の積分は無視でき, 左側の垂直線分においては函数等式から $|\zeta(\frac{1}{2}+it+z)| \ll |\zeta(\frac{1}{2}+2\eta+it+z)|$ である故,

$$\zeta^k(\tfrac{1}{2}+it) \ll 1 + \int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+\eta+i(t+\tau))|^k \frac{e^{-|\tau|}}{\eta+|\tau|} d\tau. \tag{15.2}$$

一方, $a = \frac{1}{2}+\eta+i(t+\tau)$ について (11.5) と同様に

$$\zeta^k(a) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) e^{-n} n^{-a} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(-\eta)} \zeta^k(a+w)\Gamma(w)dw + o(1).$$

従って,

$$\zeta^k(\tfrac{1}{2}+\eta+i(t+\tau)) \ll 1 + \int_{-\log^2 T}^{\log^2 T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+i(t+\tau+\xi))|^k \frac{e^{-|\xi|}}{\eta+|\xi|} d\xi.$$

これを (15.2) に挿入し容易に (15.1) を得る.

【定理 15.1】

$$M_6(T) \ll T^2 \log^{21} T \qquad (T \geq 2). \tag{15.3}$$

証明 この評価よりも詳しい次の結果を証明する．点列 $\mathcal{Q} \subset [T, 2T]$ において条件

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+i\xi)| \ge V > T^{\epsilon} \quad (\xi \in \mathcal{Q}), \quad |\xi - \xi'| \ge 1 \quad (\xi \ne \xi'; \xi, \xi' \in \mathcal{Q}) \tag{15.4}$$

が成立しているならば，

$$|\mathcal{Q}| \ll T^2 V^{-12} \log^{20} T. \tag{15.5}$$

これより (15.3) が従うことは見やすい．

先ず，長さ $T^{\epsilon} < H \le T$ の区間 $[U, U+H]$ $(T \le U \le 2T)$ をとり，そこに入る $\mathcal{Q}$ の部分列を $\mathcal{R}$ とする．勿論，

$$|\mathcal{Q}| \ll TH^{-1} \max |\mathcal{R}|. \tag{15.6}$$

更に，区間 $[U, U+H]$ を長さ G $(T^{\epsilon} \le G \le \frac{1}{2}H)$ の小区間に分割する．ここに H, G は後に定めるべきものである．これら小区間の内で $\mathcal{R}$ の点を実際に含むもののみをとり出し，それらの中点の集合を $\mathcal{S}$ とする．そして，$\tau \in \mathcal{S}$ に対応する小区間に入る $\mathcal{R}$ の部分列を $\mathcal{Q}(\tau)$ とする．補題 15.1 $(k=2)$ を用いて，

$$\begin{aligned} V^2|\mathcal{Q}(\tau)| &\ll \sum_{\xi \in \mathcal{Q}(\tau)} |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\xi)|^2 \\ &\ll \log T \int_{\tau-G}^{\tau+G} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 \sum_{\xi \in \mathcal{Q}(\tau)} e^{-|t-\xi|} dt \\ &\ll \log T \int_{\tau-G}^{\tau+G} |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 dt. \end{aligned}$$

定理 14.1 を援用して，仮定

$$G \log^2 T \ll V^2 \tag{15.7}$$

のもとに

$$\begin{aligned} &|\mathcal{Q}(\tau)| V^2 (G \log T)^{-1} \\ &\ll \sum_N (NT)^{-\frac{1}{4}} \left(|S(N,\tau)| + N^{-1} \int_0^N |S(x,\tau)| dx \right) \exp(-G^2 N/T). \end{aligned} \tag{15.8}$$

但し，

$$S(x,\tau)=\sum_{N\le n\le N+x}(-1)^n d(n)\exp(iF(\tau,n)),$$
$$T^{\varepsilon}\le N=2^{\nu}\le T^{1-\varepsilon}\quad(\nu=0,1,2,\cdots).$$

次に，(1.12) と (10.7) を用いて，

$$\sum_{\tau\in\mathcal{S}}|S(x,\tau)|$$
$$\ll (N\log^3 N)^{\frac12}\left(\sum_{\eta,\,\tau\in\mathcal{S}}\left|\sum_{N\le n\le N+x}\exp(i(F(\eta,n)-F(\tau,n)))\right|\right)^{\frac12}.$$

この n についての和には van der Corput の方法を応用する．定理 6.1 の証明を多少変更し，

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\nu}(F(\eta,\xi)-F(\tau,\xi))\right|\approx|\eta-\tau|T^{-\frac12}N^{\frac12-\nu}\qquad(\eta\ne\tau;\ \xi\approx N)$$

に注意して，

$$\sum_{N\le n\le N+x}\exp(i(F(\eta,n)-F(\tau,n)))\ll\frac{T^{\frac12}N^{\frac12}}{|\eta-\tau|}+|\eta-\tau|^{\frac12}T^{-\frac14}N^{\frac14}\qquad(\eta\ne\tau).$$

従って，(15.8) から

$$\frac{V^2}{G\log T}\sum_{\tau\in\mathcal{S}}|\mathcal{Q}(\tau)|\ll|\mathcal{S}|^{\frac12}T^{\frac12}G^{-\frac32}\log^2 T+|\mathcal{S}|H^{\frac14}G^{-\frac34}\log^{\frac32}T.$$

仮定 (15.7) に注意して，

$$H\ll G^3(\log T)^{-6}\tag{15.9}$$

なる条件のもとに

$$|\mathcal{R}|=\sum_{\tau\in\mathcal{S}}|\mathcal{Q}(\tau)|\ll|\mathcal{S}|^{\frac12}T^{\frac12}V^{-2}G^{-\frac12}\log^3 T.$$

左辺は $|\mathcal{S}|$ 以上であるから，

$$|\mathcal{R}| \ll TV^{-4}G^{-1}\log^6 T.$$

従って，$G \approx V^2(\log T)^{-2}$ として，(15.6) 及び (15.9) から，仮定 $H \ll V^6(\log T)^{-12}$ のもとに

$$|\mathcal{Q}| \ll T^2V^{-6}H^{-1}\log^8 T.$$

定理 6.1 を参照して $H \approx V^6(\log T)^{-12}$ ととることができる故，(15.5) の証明を終わる．

[附記] 本節の結果は Heath-Brown (1978) による．以下の議論で必要となるものではないが，平均値理論と L 篩の範疇において一定の統一を示すことを目的として述べた．原証明では Atkinson 公式が用いられているが，上記証明ではこれに代えて定理 14.1 による簡易化を行っている．評価 (15.3) を用いれば (12.9)–(12.13) を多少改良できる．なお，(14.13) において $G = T^{\frac{1}{3}}$ とすれば，(15.1) から (6.10) よりやや良い評価を得る．つまり，上記証明で定理 6.1 を実は必要としない．これが上記「統一」の意味である．Atkinson と Halász の着想の重要さを理解することができよう．

第 II 部

実解析的尖点形式のスペクトル理論

—16—
和と非ユークリッド構造

以上でリーマンゼータ函数の古典論概容を終わりとする．以下では現代的な理論の一端を概説する．議論の基礎は非ユークリッド空間としての複素上半平面

$$\mathcal{H} = \{z = x + iy : -\infty < x < \infty,\, y > 0\}$$

における調和解析に置かれる．

対するに，いままでの議論の基礎は Fourier 解析，つまりユークリッド空間上の調和解析にあった．函数等式 (1.14)–(1.15) は Poisson 和公式の帰結の一つであり，Weyl–van der Corput–Vinogradov の議論も Fourier 解析を基礎としている．第 10 節の L 篩，更には，第 13，14 節の議論も子細に検討すれば同様であることが理解されるであろう．Atkinson 分解 (13.7) から (13.14) への変形は，対応する Atkinson 自身による議論においては Poisson 和公式によって処理されている．

既に示唆したが，Weyl の着想 (6.4) と Atkinson 分解とは，応用の対象が異なっているだけで，実は同じものと見なされる．これらにより問題は変換されて，「対角部分」，即ち (6.4) では $r = 0$ なる部分，(13.7) では $m = n$ なる部分，と比較して「非対角部分」を如何に有効に評価するか，という命題になる．Van der Corput の方法では，例えば (6.13) の $Z(N, t; u, v)$ の評価であり，Vinogradov の方法では (7.8) の評価である．Selberg 不等式 (10.6) は Hilbert 空間の任意の元の集まりが直交関係からどの程度ずれているかを「非対角部分」と関係付けるものと言えよう．この点は Halász の着想 (10.7) においてより鮮明である．この「対角·非対角」の対比がゼータ函数を直接に含む「等式」の中で実現されているのが，(13.17) である．無限和の部分が「非対角」に対応する．

ある問題に何らかの調和解析を応用するということは，そこに隠された「直交関係」を探し当て,「スペクトル分解（変数分離）」を通して問題をより扱い易いものに変換することと言える．そして，探索の効率を高めるのが 様々な着想による対角，非対角部分の分離であることを上に見てきた訳である．以下に展開する議

論では，直交関係を指数函数で張られる空間の範囲に止めず，$\mathcal{H}$ 上の「保型形式」の空間を視野に入れて考察する．勿論，この空間の拡張は Weyl–Atkinson の着想を拡張すべき自然な必要性から生まれたものである．即ち，Atkinson 分解の内部に更なる構造を求めるならば，保型形式を含む議論に導かれるのである．これを詳しく述べよう．

Atkinson 分解は一般的には

$$\sum_{m,n} f(m,n) = \Big\{ \sum_{m=n} + \sum_{m>n} + \sum_{m<n} \Big\} f(m,n) \tag{16.1}$$

と表現される．函数 f は和が意味をもつ限りにおいて任意である．前節までの議論では専らこの分解を用いて様々な結論が得られた．しかし，各問題について果たして (16.1) は最良の分解であろうか，という議論はなされなかった．勿論，この命題を極く一般的に議論することは無用であろう．そこで，一つの着想として，「対角」の意味を変更することを考える．これもまた様々に考え得るが，数論的に最も単純と思われる分解

$$\sum_{m,n} f(m,n) = \Big\{ \sum_{km=ln} + \sum_{km>ln} + \sum_{km<ln} \Big\} f(m,n) \qquad (\mathbb{Z} \ni k, l \neq 0)$$

を導入しよう．基準線を $y=x$ に代えて $y=(l/k)x$ とし，それを運動させてみる訳である．これは，適当な重み $w(k,l)$ を両辺に乗じて

$$\sum_{m,n} f(m,n) = \frac{1}{W}\Big\{ \sum_{km=ln} + \sum_{km>ln} + \sum_{km<ln} \Big\} w(k,l) f(m,n) \tag{16.2}$$

を考察するに等しい．但し，$W \neq 0$ は $w(k,l)$ の和である．右辺の特別の場合に分解 (16.1) は含まれる．つまり，Atkinson 分解は四重和の分解

$$\sum_{k,l,m,n} F(k,l,m,n) = \Big\{ \sum_{km=ln} + \sum_{km>ln} + \sum_{km<ln} \Big\} F(k,l,m,n) \tag{16.3}$$

の特別な場合と見なし得る．そこで，視点を改め，四重和を行列環 $M_2(\mathbb{Z})$ 上の和と見なせば，(16.3) は

$$\sum_{N} F(N) = \Big\{ \sum_{|N|=0} + \sum_{|N|>0} + \sum_{|N|<0} \Big\} F(N) \qquad (|N| = \det N)$$

と勿論同義である．Hecke 分類を想起し，更に

$$\sum_{|N|>0} F(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|N|=n} F(N)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{ad=n} \sum_{b=1}^{d} \sum_{\gamma\in SL(2,\mathbb{Z})} F\left(\gamma\begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix}\right). \tag{16.4}$$

ここに Atkinson 分解と保型形式との密接な関係が明らかとなる．函数 F が充分に滑らかであれば γ についての和は $SL(2,\mathbb{Z})$ 上の調和解析によりスペクトル分解され，外部和は Hecke 作用素についての和と解釈できる．しかも，各スペクトル空間は分解されて各々全ての Hecke 作用素の固有空間となる故，(16.4) は概念的に

$$\sum_{km\neq ln} F(k,l,m,n) = \sum_{\kappa} H_\kappa \Psi(\kappa) + (\text{連続スペクトルの貢献}) \tag{16.5}$$

なる等式をもたらす．ここに，κ は離散スペクトル上を動き Ψ は F のある積分変換，H_κ は Hecke 固有値についての和である．

後に，4 乗平均 $\mathcal{Z}_2(g)$ について，(16.5) を具体的に書き下し，$\zeta(s)$ の内部に「非ユークリッド構造」の存在することを示す．

[附記]　本節については [12, pp. 150–153] を参照せよ．次節から第 22 節まで [12, 第 1 章] をやや簡略して展開する．

—17—
モジュラー群

上半平面における調和解析とは,「非ユークリッド・ラプラシアン」

$$\Delta = -y^2((\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2)$$

のスペクトル分解を意味する．勿論，Δ の作用する函数空間を定める必要があるが，本節ではそのための基本的な準備を行う．

上半平面は計量

$$y^{-1}((dx)^2 + (dy)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{17.1}$$

によって Riemann 空間となるが，その運動群として写像

$$\gamma : z \mapsto \frac{az+b}{lz+h} \qquad (ah - bl = 1;\ a, b, l, h \in \mathbb{R}) \tag{17.2}$$

からなる集合 $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ をとる．つまり，各 γ の作用について (17.1) は不変である．このことから,「曲面 $\mathcal{H}$」上の二点 z, w の距離 $d(z,w)$ は，これらを $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ の元で虚軸上に同時に移して，像の二点間の線分を計量 (17.1) で測ればよいことが解る．多少の計算の後に

$$d(z,w) = 2\mathrm{arcsinh}\sqrt{\varrho(z,w)}, \quad \varrho(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4(\mathrm{Im}\, z)(\mathrm{Im}\, w)}. \tag{17.3}$$

また，(17.1) に付随する Laplace–Beltrami 作用素は $-\Delta$ である故，全ての $\gamma \in \mathbb{T}(\mathcal{H})$ について$\Delta \cdot \gamma = \gamma \cdot \Delta$ が成立する．同様に，(17.1) から導かれる測度

$$d\mu(z) = y^{-2}dxdy \tag{17.4}$$

も当然に γ の作用で不変である．更に，非ユークリッド外法線微分

$$y\frac{\partial}{\partial n} = y\left\{\frac{dy}{|dz|}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{|dz|}\frac{\partial}{\partial y}\right\} \tag{17.5}$$

も同じ不変性を有する．

次に,「モジュラー群」Γ を群 $SL(2,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ における自明な像とする．つまり，$\Gamma \ni \gamma$ は (17.2) において $a,b,l,h \in \mathbb{Z}$ となるものであり，

$$\Gamma \cong SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}.$$

群 Γ は $\mathcal{H}$ に不連続的に作用し，その基本領域は

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} : |z| \geq 1,\ |x| \leq \tfrac{1}{2}\}. \tag{17.6}$$

勿論，$\mathcal{F}$ はリーマン多様体と見なせるが，その場合は「曲面 $\mathcal{F}$」と表示する．こ

の曲面に無限遠点に対応する点を付け加え，それを「尖点」という．また，ある $\gamma \in \Gamma$ について $\gamma(z) = w$ と書けるとき

$$z \equiv w \bmod \Gamma$$

と略記する．

函数 f が Γ-保型であるとは，$f(\gamma(z)) = f(z)$ が全ての $\gamma \in \Gamma$，$z \in \mathcal{H}$ について成立することである．これは，f は曲面 $\mathcal{F}$ 上の函数である，と言うに等しい．この場合 $f \in C^2(\mathcal{F})$ であれば，Δf はやはり Γ-保型である．この様な函数の例として「Poincaré 級数」

$$P_m(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\operatorname{Im} \gamma(z))^s e(m\gamma(z)) \qquad (z \in \mathcal{H},\ \operatorname{Re} s > 1) \tag{17.7}$$

がある．ここに，$m \geq 0$ は整数，Γ_∞ は写像 $z \mapsto z+1$ から生成される Γ の巡回部分群である．和の各項の値は γ の属する Γ_∞-左剰余類のみで定まり，且つ下記 (17.8) より和は絶対収束している故，$P_m(z,s)$ は Γ-保型である．

容易に，

$$\begin{aligned} P_m(z,s) &= y^s e(mz) \\ &+ y^s \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=-\infty \\ (h,l)=1}}^{\infty} |lz+h|^{-2s} e\Big(\frac{mh^*}{l}\Big) \exp\Big(-\frac{2\pi mi}{l(lz+h)}\Big). \end{aligned} \tag{17.8}$$

但し，$hh^* \equiv 1 \bmod l$ である．変数 h を法 l に従って分類し

$$\begin{aligned} P_m(z,s) = y^s e(mz) + y^s \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s} &\sum_{\substack{h=1 \\ (h,l)=1}}^{l} e(mh^*/l) \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} |z+h/l+n|^{-2s} \exp\Big(-\frac{2\pi mi}{l^2(z+h/l+n)}\Big). \end{aligned}$$

Poisson 和公式により，

$$P_m(z,s) = y^s e(mz) + y^{1-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nx) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s} S(m,n;l)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-2\pi n y \xi i - \frac{2\pi m}{l^2 y(1-\xi i)}\Big)(1+\xi^2)^{-s} d\xi. \quad (17.9)$$

但し,

$$S(m,n;l) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,l)=1}}^{l} e\big((hm + h^* n)/l\big) \quad (17.10)$$

は「Kloosterman 和」である. 式 (17.9) において和の順序交換が行われているが, 必要となる絶対収束性は積分が $O(\exp(-\pi|n|y))$ であることから容易に確かめられる. なお, この評価は積分路を $\mathrm{Im}\,\xi = -\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(n)$ に移動すれば直ちに従う. 更に,「Weil 評価」

$$|S(m,n;l)| \le d(l)(m,n,l)^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} \quad (17.11)$$

に注意して次の結果を得る.

【補題 17.1】 条件 $m > 0$, $z \in \mathcal{F}$ のもとに $P_m(z,s)$ は s の函数として領域 $\sigma > \frac{3}{4}$ で正則であり

$$P_m(z,s) \ll y^{1-\sigma}. \quad (17.12)$$

一方, $m = 0$ の場合

$$E(z,s) = P_0(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}\,\gamma(z))^s \quad (17.13)$$

は「Eisenstein 級数」と呼ばれ, 以下の議論で重要である.

【補題 17.2】 函数 $E(z,s)$ は任意の $z \in \mathcal{H}$ について変数 $s \in \mathbb{C}$ の有理型函数であり, Fourier 展開

$$E(z,s) = y^s + \varphi_\Gamma(s) y^{1-s}$$
$$+ \frac{2\pi^s \sqrt{y}}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \sum_{n \ne 0} |n|^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(|n|) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e(nx) \quad (17.14)$$

をもつ．但し，

$$\varphi_\Gamma(s)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}=\frac{\pi^{2s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2(1-s))}{\Gamma(s)\zeta(2s)}. \tag{17.15}$$

特に，z の位置に関わらず $E(z,s)$ は領域 $\mathrm{Re}\, s\geq\frac{1}{2}$ $(s\neq 1)$ において正則である．また，点 $s=1$ では一位の極をもち，その留数は $3/\pi$ である．更に，$E(z,s)$ は函数等式

$$E(z,s)=\varphi_\Gamma(s)E(z,1-s) \tag{17.16}$$

及び微分方程式

$$\Delta E(z,s)=s(1-s)E(z,s) \tag{17.17}$$

を満たす．

証明　条件 $\mathrm{Re}\, s>1$ のもとに展開 (17.14) は (17.9) $(m=0)$ より従う．実際，等式 (1.7),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}d\xi=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\qquad\bigl(\mathrm{Re}\,\nu>0\bigr)$$

及び

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(y\xi)}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}d\xi=2\sqrt{\pi}\frac{(y/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}K_\nu(y)\qquad\bigl(y>0;\ \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac{1}{2}\bigr) \tag{17.18}$$

に注意すれば足りる．表示

$$K_\nu(y)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\xi^{\nu-1}\exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}y(\xi+\xi^{-1})\Bigr)d\xi \tag{17.19}$$

から，$K_\nu(y)$ は ν について整函数であり，$K_\nu(y)=K_{-\nu}(y)$ $(\mathrm{Re}\, y>0)$ 且つ

$$K_\nu(y)=(1+o(1))\Bigl(\frac{\pi}{2y}\Bigr)^{\frac{1}{2}}e^{-y}\qquad(y\to+\infty) \tag{17.20}$$

である．変数 s についての函数 $E(z,s)$ の解析的性質，及び等式 (17.16) はこれらの事実と定理 1.1 並びに 3.1 から得られる．等式 (17.17) は

$$\Delta[(\mathrm{Im}\,\gamma(z))^s]=s(1-s)(\mathrm{Im}\,\gamma(z))^s\qquad\bigl(s\in\mathbb{C},\ \gamma\in\mathbb{T}(\mathcal{H})\bigr) \tag{17.21}$$

の帰結であるが，後者は $\Delta\cdot\gamma=\gamma\cdot\Delta$ より自明である．あるいは，展開 (17.14) に

おいて函数 $\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)$ が微分方程式

$$[D_{s,n}g](y) \equiv -y^2g''(y) + ((2\pi ny)^2 + s(s-1))g(y) = 0 \quad (y > 0) \tag{17.22}$$

の解であることを用いてもよい．

微分作用素 $D_{s,n}$ は作用素 $\Delta + s(s-1)$ に変数分離を応用して得られる．実際，

$$(\Delta + s(s-1))\Big\{\sum_n a_n(y)e(nx)\Big\} = \sum_n [D_{s,n}a_n](y)e(nx). \tag{17.23}$$

この関係式と次の基本的な事実は次節で用いられる．

【補題 17.3】 微分方程式 (17.22) $(n > 0)$ は一次独立な解 $\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)$ 及び $\sqrt{y}I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)$ をもつ．

証明 定義

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}, \tag{17.24}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}\big\{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\big\} \tag{17.25}$$

を用いて確かめられるが，これら二つの解の Wronskian は 1 に等しい．ここに，$z^\nu = \exp(\nu \log z)$ $(|\arg z| < \pi)$ である．

[附記] 評価 (17.11) については Stepanov (1969) による極く初等的な証明がある．実は，以下の議論では (17.11) は本質的ではない．例えば，評価 $S(m,n;l) = O(l^{1-\varepsilon})$ にて済ませることも可能である．Kloosterman 和の一般論は [14] に詳しい．なお，Lobachevsky–Bolyai 非ユークリッド幾何 (或いは，双曲幾何) の「上半平面モデル」は計量 (17.1) も含めて Beltrami (1860) による．非ユークリッド幾何は [16] に詳しいが，本書では上に述べた以上のことは必要としない．高次元双曲幾何に付随する Vahlen 群 (1902) とその離散部分群についても本節以下の議論は大略展開できる．例えば，3 次元の場合については [12, pp. 83–90] を見よ．

—18—
Maass

主題に戻り，$L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ を

$$\|f\|^2 = \int_{\mathfrak{F}} |f(z)|^2 d\mu(z) < +\infty$$

なる全ての Γ-保型函数 f の集合とする．常数はここに含まれる．何故ならば

$$\int_{\mathfrak{F}} d\mu(z) = \frac{\pi}{3}. \tag{18.1}$$

明らかに，内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathfrak{F}} f_1(z)\overline{f_2(z)} d\mu(z) \tag{18.2}$$

について $L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ は Hilbert 空間である．作用素 Δ を空間 $L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ においてスペクトル分解することが目的であるが，議論を容易にするために，線形部分集合 $B^\infty(\mathfrak{F})$ を導入する．これは，$L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ の元でその任意階の偏導函数が $\mathfrak{F}$ で急減少であるもの全てからなる．ここで $g(z)$ が急減少とは評価 $g(z) = O(y^{-M})$ $(z \in \mathfrak{F})$ が任意の固定された $M > 0$ について成立することである．勿論，$B^\infty(\mathfrak{F})$ は $L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ で稠密である．

曲面 $\mathfrak{F}$ は境界をもたないことに注意して，Green 公式により

$$\langle \Delta f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathfrak{F}} y^2 \nabla f_1(z) \cdot \overline{\nabla f_2(z)} d\mu(z) \qquad (f_1, f_2 \in B^\infty(\mathfrak{F})). \tag{18.3}$$

但し，∇ は通常の「gradient」である．つまり，

$$\langle \Delta f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \Delta f_2 \rangle \qquad (f_1, f_2 \in B^\infty(\mathfrak{F})) \tag{18.4}$$

を得，Δ はこの意味において「対称作用素」である．更に，(18.3) から常数以外の $f \in B^\infty(\mathfrak{F})$ について

$$\langle \Delta f, f \rangle > 0. \tag{18.5}$$

即ち，Δ は「半有界対称作用素」である．従って，von Neumann 理論により，Δ は「自己随伴作用素」に拡張可能，つまりスペクトル分解を有する．しかし，以下では作用素論一般を敢えて用いず，初等的·構成的な方法にて議論を進める．数論的な陰影を残すためである．

先ず，集合 $B^\infty(\mathcal{F})$ は Δ の L^2-固有函数を探索するにふさわしい場所であることを示そう．

【補題 18.1】 条件 $f \in C^2(\mathcal{F}) \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ のもとに $\Delta f = (\kappa^2 + \frac{1}{4})f$ $(\mathrm{Im}\,\kappa \geq 0)$ と仮定する．このとき，$\kappa = \frac{1}{2}i$ であれば f は常数である．他方，$\kappa \neq \frac{1}{2}i$ であれば

$$\kappa > 3.815 \tag{18.6}$$

ととれ，f は絶対収束する Fourier 展開

$$f(z) = y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} \rho(n) K_{i\kappa}(2\pi|n|y) e(nx) \quad (z \in \mathcal{H}) \tag{18.7}$$

をもつ．従って，特に $f \in B^\infty(\mathcal{F})$ である．

証明 先ず，$\kappa \neq \frac{1}{2}i$ の場合を扱う．函数 f は周期 1 をもつ故，絶対収束する Fourier 級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n, y) e(nx) \qquad (z \in \mathcal{H}) \tag{18.8}$$

に展開される．容易に

$$D_{\frac{1}{2}+i\kappa,\, n}\, a(n, y) = 0.$$

従って，

$$a(0, y) = \begin{cases} c_0 y^{\frac{1}{2}+i\kappa} + d_0 y^{\frac{1}{2}-i\kappa} & (\kappa \neq 0), \\ c_0 y^{\frac{1}{2}} + d_0 y^{\frac{1}{2}} \log y & (\kappa = 0). \end{cases}$$

また，補題 17.3 により $n \neq 0$ については，

$$a(n, y) = c_n y^{\frac{1}{2}} K_{i\kappa}(2\pi|n|y) + d_n y^{\frac{1}{2}} I_{i\kappa}(2\pi|n|y).$$

一方，条件 $f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ により

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_1^{\infty} |a(n,y)|^2 y^{-2} dy \leq \int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty. \tag{18.9}$$

Bessel 函数 I_ν は指数函数的に増大する故，$d_n = 0$ $(n \neq 0)$ を得，

$$f(z) = a(0,y) + y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} c_n K_{i\kappa}(2\pi|n|y) e(nx). \tag{18.10}$$

ここで，評価

$$c_n = O(e^{\varepsilon|n|}) \tag{18.11}$$

に注意する．これは，(18.10) の右辺が任意の $y > 0$ について絶対収束し，且つ漸近式 (17.20) が存在するからである．また，$\kappa = 0$ のとき，(18.9) より $a(0,y) \equiv 0$ である．他方，$\operatorname{Im} \kappa > 0$ の場合は自明な等式

$$0 = \int_{\mathcal{F}_Y} \left[E(z,s)\Delta f(z) - f(z)\Delta E(z,s)\right] d\mu(z) \quad \left(s = \tfrac{1}{2} - i\kappa \neq 1\right) \tag{18.12}$$

に注意する．ここに，$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F} \cap \{z : \operatorname{Im} z \leq Y\}$ であり，(17.17) を用いた．Green 公式を用いて，

$$0 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[E(z,s)\frac{\partial}{\partial y} f(z) - f(z)\frac{\partial}{\partial y} E(z,s)\right] dx \qquad \big(\operatorname{Im} z = Y\big). \tag{18.13}$$

ここに (17.14) と (18.10) を挿入し $Y \to +\infty$ とすれば

$$c_0 = d_0 \varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2} - i\kappa).$$

しかるに，$\operatorname{Im} \kappa > 0$ のとき (18.9) より $d_0 = 0$ が従う故，$a(0,y) \equiv 0$ を再び得る．即ち，(18.7) が証明された．

次に，$\kappa = \frac{1}{2} i$ の場合は (18.10) の代わりに，展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi|n|y + 2\pi i n x}$$

が成立する．従って，(18.3) において $f_1 = f_2 = f - c_0$ と置き，$f \equiv c_0$ を得る．

更に，(18.6) を示そう．等式 (18.3) において，積分域 $\mathcal{F}$ を任意の $\gamma \in \Gamma$ につい

て $\gamma(\mathfrak{F})$ で置き換え得ることに注意する．そこで，写像 $z \mapsto -1/z$ による $\mathfrak{F}$ の像を $\mathfrak{F}^*$ とすれば

$$2(\kappa^2+\tfrac{1}{4})\|f\|^2 = \int_{\mathfrak{F}\cup\mathfrak{F}^*} |\nabla f|^2 dxdy$$
$$\geq \int_{y_0}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\partial f/\partial x|^2 dxdy \qquad (y_0=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}).$$

つまり，

$$2(\kappa^2+\tfrac{1}{4})\|f\|^2 \geq 4\pi^2\int_{y_0}^{\infty}\sum_n n^2|a(n,y)|^2dy$$
$$\geq 4\pi^2 y_0^2\int_{y_0}^{\infty}\sum_{n\neq 0}|a(n,y)|^2y^{-2}dy \geq 4\pi^2y_0^2\|f\|^2.$$

これより (18.6) を得る．

以上を背景としてこれから証明すべき Δ のスペクトル分解を記述する．

【定理 18.1】 作用素 Δ を $B^\infty(\mathfrak{F})$ に制限するとき，その固有値全体は離散集合である．これらを $\lambda_j=\kappa_j^2+\frac{1}{4}$ $(\kappa_j>0,\ j=1,2,\cdots;\ \kappa_{j'}\geq\kappa_j,\ j'>j)$ とし，対応する固有函数 ψ_j は正規直交系を成しているものとする．このとき

$$L^2(\mathfrak{F},d\mu)=\mathbb{C}\oplus\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{E}. \tag{18.14}$$

但し，$\mathfrak{D}$ は集合 $\{\psi_j\}$ で張られ

$$\mathfrak{E}=\left\{\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^T\eta(t)E(z,\tfrac{1}{2}+it)dt\ :\ \eta\in L^2(0,\infty)\right\}.$$

ここに，極限は空間 $L^2(\mathfrak{F},d\mu)$ の位相でとり，$L^2(0,\infty)$ は Lebesgue 測度に関する通常の L^2-空間である．換言すれば，任意の $f\in L^2(\mathfrak{F},d\mu)$ について展開

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\langle f,\psi_j\rangle\psi_j(z)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(t,f)E(z,\tfrac{1}{2}+it)dt \tag{18.15}$$

が $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 内のノルム収束の意味で成立する．但し，$\psi_0 \equiv (3/\pi)^{\frac{1}{2}}$,

$$\mathcal{E}(t, f) = \underset{Y\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{\mathcal{F}_Y} f(z)E(z, \tfrac{1}{2} - it)\, d\mu(z). \tag{18.16}$$

ここで，$\mathcal{F}_Y$ は (18.12) におけると同じであり，極限は空間 $L^2(0, \infty)$ の位相にてとる．つまり，任意の $f_1, f_2 \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ に対して Parseval 等式

$$\langle f_1, f_2\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f_1, \psi_j\rangle \overline{\langle f_2, \psi_j\rangle} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t, f_1)\overline{\mathcal{E}(t, f_2)} dt \tag{18.17}$$

が成立する．

[附記]　半有界対称作用素の拡張については [15, 第 124 節] を見よ．作用素 Δ の固有函数となる Γ-保型函数を導入したのは，Maass (1948) である．そのために上記 ψ_j は「Maass 波動」あるいは「実解析的尖点形式」と呼ばれる．部分空間 $\mathfrak{D}$ が無限次元であることは第 25 節 ((25.5)) にて「Selberg 跡公式」を用いて示される．展開

$$\psi_j(z) = y^{\frac{1}{2}} \sum_{n\neq 0} \rho_j(n) K_{i\kappa_j}(2\pi|n|y)e(nx) \qquad (j \neq 0) \tag{18.18}$$

における「Maass-Fourier 係数」$\rho_j(n)$ は後に見る様に，数論的に重要な意味をもつ．Maass は，正則な保型形式についての Hecke–Petersson 理論を「実解析的保型形式」の世界に押し広げたのである．Hecke–Petersson 理論には後に触れる (第 28 節)．定理 18.1 は Roelcke (1956) と Selberg (?) による．勿論，彼らは単にモジュラー群のみに限らず，一般的な離散群について考察した．しかし，数論への応用に限るならば，以下に述べる定理 18.1 の取扱いは充分に雛形をなすものである．即ち，数論的に定義された $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ の離散部分群について，以下の議論を拡張することは容易である．なお，評価 (18.6) は Roelcke による．また，(18.3) 及び (18.13) を示すには実際は (17.5) の不変性を必要とするが，敢えて詳細を省いた．このことは，曲面 $\mathcal{F}$ が「境界をもたない」という表現に含まれている．

—19—
解　核

定理 18.1 の証明を始める．通例に従い，問題を積分方程式に変換し Hilbert–Schmidt 定理を援用して議論する．このために Δ の「自由解核」，つまり「曲面」$\mathcal{H}$ 上での「解核」を先ず求める．

ユークリッド空間上のポテンシャル論においては，対応する核は二点間の距離の函数である．同様に $\mathcal{H}$ 上においては核は二点間の非ユークリッド距離の函数と考えられる．つまり，自由解核に対しては，Δ は (17.3) にて定義された $\varrho(z,w)$ に関する一変数微分作用素に還元されるべきである．これを確かめるために，$z=x+iy$, $w=u+iv$ として，

$$\Delta_w f(\varrho(z,w)) = -v^2\Big\{f''(\varrho)[\varrho_u^2+\varrho_v^2]+f'(\varrho)[\varrho_{uu}+\varrho_{vv}]\Big\},$$

及び

$$\begin{aligned}\varrho_u &= (u-x)/(2vy), & \varrho_v &= (v^2-y^2-(u-x)^2)/(4v^2y),\\ \varrho_{uu} &= 1/(2vy), & \varrho_{vv} &= (y^2+(u-x)^2)/(2v^3y)\end{aligned}\tag{19.1}$$

に注意する．従って，実際に

$$\Delta_w f(\varrho(z,w)) = -(\varrho^2+\varrho)f''(\varrho)-(1+2\varrho)f'(\varrho)\tag{19.2}$$

と還元される．

そこで，微分方程式

$$[(\varrho^2+\varrho)(d/d\varrho)^2(1+2\varrho)(d/d\varrho)+\alpha(1-\alpha)]f(\varrho)=0$$

を解き，自由解核の候補として

$$r_\alpha(z,w)=p_\alpha(\varrho(z,w)),\quad p_\alpha(\varrho)=\frac{\Gamma(\alpha)^2}{4\pi\Gamma(2\alpha)}\varrho^{-\alpha}F(\alpha,\alpha;2\alpha;-\varrho^{-1})\tag{19.3}$$

を得る．但し，F は超幾何函数である．Mellin–Barnes 公式により

$$p_\alpha(\varrho) = \frac{1}{8\pi^2 i}\int_{(-\frac{1}{4})} \frac{\Gamma(\xi+\alpha)^2\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha)}\varrho^{-\xi-\alpha}d\xi \tag{19.4}$$

とも書ける．

【補題 19.1】　実数 $\alpha \geq \frac{1}{2}$ について，

$$(\Delta + \alpha(\alpha-1))_w r_\alpha(z,w) = 0 \qquad (z \neq w). \tag{19.5}$$

また，

$$\begin{aligned} p_\alpha(\varrho) &= -(4\pi)^{-1}\log\varrho - (2\pi)^{-1}(\Gamma'/\Gamma)(\alpha) \\ &\qquad -(2\pi)^{-1}c_E + O(\rho|\log\rho|) & (\varrho \to +0), \\ p'_\alpha(\varrho) &= -(4\pi\varrho)^{-1} + (4\pi)^{-1}\alpha(1-\alpha)\log\varrho + O(1) & (\varrho \to +0), \\ p_\alpha(\varrho) &= O(\varrho^{-\alpha}) & (\varrho \to +\infty). \end{aligned} \tag{19.6}$$

証明　前段は既に証明されている．後段は (19.4) において積分路を適当に移動すれば容易に得られる．なお，前段も (19.2) に注意して (19.4) から示すことができる．

上記補題は $r_\alpha(z,w)$ が実際に Δ の自由解核であることと同値であるが，以下の議論ではその事実は必要とせず，単に (19.3)–(19.6) のみを必要とする．つまり，本節の始めに述べたことに多少そぐわないが，$r_\alpha(z,w)$ を「解核」としてではなく，正確には $\Delta+\alpha(\alpha-1)$ の「左逆作用素」をもたらす積分核，として用いる．この論点は議論を簡明にするものである．下記の補題 19.2 を見よ．

次に，議論を曲面 $\mathfrak{F}$ に移すために，

$$R_\alpha(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_\alpha(z,\gamma(w)) \tag{19.7}$$

を導入する．この和は 仮定 $z \not\equiv w \bmod \Gamma$ のもとに $\alpha > 1$ で絶対収束し，$\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ 上

の函数を表す．これを示すために，集合

$$C(\eta;z,w)=\Big\{\gamma\in\Gamma\,:\,\varrho(z,\gamma(w))<\eta\Big\}\quad(z=x+iy,\,w=u+iv\in\mathfrak{F})$$

を考察する．明らかに，

$$C(\eta;z,w)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\Big\{\gamma_1^n\gamma\,:\,n\in\mathbb{Z},\,\varrho(z,n+\gamma(w))<\eta\Big\}.$$

但し，$\gamma_1(z)=z+1$ である．条件 $\varrho(z,n+\gamma(w))<\eta$ より

$$(x-n-\operatorname{Re}\gamma(w))^2<4\eta y\operatorname{Im}\gamma(w),\quad(y-\operatorname{Im}\gamma(w))^2<4\eta y\operatorname{Im}\gamma(w).$$

前者から，各 $\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma$ について対応する整数 n の個数は高々 $1+4(\eta y\operatorname{Im}\gamma(w))^{\frac{1}{2}}$ である．後者からは

$$y/q(\eta)<\operatorname{Im}\gamma(w)<q(\eta)y,\quad q(\eta)=1+2\eta+2(\eta(1+\eta))^{\frac{1}{2}}.$$

従って，

$$|C(\eta;z,w)|\ll\textstyle\sum_M(1+(\eta yM)^{\frac{1}{2}})\big|\big\{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma\,:\,M\le\operatorname{Im}\gamma(w)\big\}\big|,$$
$$M=2^\nu\quad(\nu\in\mathbb{Z}),\quad y/(2q(\eta))<M<2q(\eta)y.$$

ここで，代表元 γ を数えることは不等式 $(lu+h)^2+(lv)^2\le M$ の互いに素な整数解 l,h を数えることと同じである．よって，任意の $\eta_0>0$ を固定して，z,w について一様に

$$\begin{aligned}|C(\eta;z,w)|&\ll\sum_M(1+(\eta yM)^{\frac{1}{2}})(1+(Mv)^{-\frac{1}{2}})(1+(v/M)^{\frac{1}{2}})\\&\ll\eta y+(\eta yv)^{\frac{1}{2}}\log(\eta+1),\quad(\eta>\eta_0).\end{aligned}\tag{19.8}$$

そこで，(19.6) の第 3 式と (19.8) を用いて，固定された $\alpha>1$，$\eta_0>0$，$z\in\mathfrak{F}$ に対して，

$$R_\alpha(z,w)=\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \varrho(z,\gamma(w))<\eta_0}}r_\alpha(z,\gamma(w))+O((\operatorname{Im}w)^{\frac{1}{2}})\tag{19.9}$$

を得る．

この右辺の和を考察しよう．このために，$\mathfrak{D}(z,\tau)$ を中心 $(x,(1+2\tau)y)$，半径 $2(\tau(1+\tau))^{\frac{1}{2}}y$ なる円盤とする．条件 $\varrho(z,w)<\eta_0$ は $w\in\mathfrak{D}(z,\eta_0)$ と同義である．いま，z を領域 $\mathcal{F}$ の内部にあるとし，η_0 を充分に小さくとれば，$\mathfrak{D}(z,\eta_0)$ は $\mathcal{F}$ 内に完全に含まれる．このとき，$w\in\mathcal{F}\backslash\mathfrak{D}(z,\eta_0)$ であれば，問題の和は空である．また，$w\in\mathfrak{D}(z,\eta_0)$ であれば，和は $r_\alpha(z,w)$ に等しい．即ち，(19.6) の第 1 式から，$w\in\mathcal{F}$ について一様に

$$R_\alpha(z,w)=-\frac{1}{2\pi}\log|z-w|+O((\mathrm{Im}\,w)^{\frac{1}{2}})\quad(z\in\mathcal{F}\backslash\partial\mathcal{F};\ \alpha>1).\qquad(19.10)$$

同様に $z\in\partial\mathcal{F}$ の場合も $R_\alpha(z,w)$ は w の函数として対数特異点を z でもつ．但し，この場合 $z\equiv z'\bmod\Gamma$ $(z'\in\partial\mathcal{F})$ なる z' も対数特異点である．ここで，$z=\gamma(z')$ なる $\gamma\in\Gamma$ は複数個存り得る故，注意が必要となるが，点 i，$\frac{1}{2}(\pm1+i\sqrt{3})$ 以外ではその様なことは起こらない．勿論，曲面 $\mathcal{F}$ にて適当な局所化のもとに議論すればこの様な場合分けは必要ないが，以下の議論では実は (19.10) のみで足りる．

【補題 19.2】 仮定 $\alpha>1$ のもとに

$$(\mathcal{R}_\alpha\,g)(z)=\int_{\mathcal{F}}R_\alpha(z,w)g(w)d\mu(w)\qquad(19.11)$$

とすれば，任意の $f\in B^\infty(\mathcal{F})$ について

$$\mathcal{R}_\alpha(\Delta+\alpha(\alpha-1))f=f.\qquad(19.12)$$

証明　先ず，(19.7) の右辺に $\partial/\partial u$，$\partial/\partial v$，$(\partial/\partial u)^2$，$(\partial/\partial v)^2$ $(w=u+iv)$ を項別に作用させ得ることを示す．それにより，Δ の不変性と (19.5) から

$$(\Delta+\alpha(\alpha-1))_wR_\alpha(z,w)=0\qquad\big(z,w\in\mathcal{H};\ z\not\equiv w\bmod\Gamma\big)\qquad(19.13)$$

が従うこととなる．

先ず，z は固定されているとしてよい．条件 $z\not\equiv w\bmod\Gamma$ からある $c(z)>0$ が存在して $\varrho(z,\gamma(w))\geq c(z)$ が全ての $\gamma\in\Gamma$ について成立している．勿論，$\varrho(z,\gamma(w))=\varrho(\gamma^{-1}(z),w)$ である故，

$$(\partial/\partial v)r_\alpha(z,\gamma(w))=(\partial/\partial v)r_\alpha(\gamma^{-1}(z),w)$$

$$= p'_\alpha(\varrho(\gamma^{-1}(z), w))\varrho_v(\gamma^{-1}(z), w).$$

表示 (19.1) と (19.4) を用いて

$$\begin{aligned}(\partial/\partial v)r_\alpha(z,\gamma(w)) &\ll \varrho(z,\gamma(w))^{-\alpha}\frac{|v^2-(\mathrm{Im}\,\gamma^{-1}(z))^2-(u-\mathrm{Re}\,\gamma^{-1}(z))^2|}{v^2\mathrm{Im}\,\gamma^{-1}(z)\varrho(\gamma^{-1}(z),w)}\\ &\ll \varrho(z,\gamma(w))^{-\alpha}\frac{v|v-\mathrm{Im}\,\gamma^{-1}(z)|+|w-\gamma^{-1}(z)|^2}{v|w-\gamma^{-1}(z)|^2}\\ &\ll \varrho(z,\gamma(w))^{-\alpha}(v^{-1}+|w-\gamma^{-1}(z)|^{-1}). \qquad (19.14)\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}(\partial/\partial u)r_\alpha(z,\gamma(w)) &\ll \varrho(z,\gamma(w))^{-\alpha}|w-\gamma^{-1}(z)|^{-1},\\ (\partial/\partial u)^2 r_\alpha(z,\gamma(w)) &\ll \varrho(z,\gamma(w))^{-\alpha}|w-\gamma^{-1}(z)|^{-2}, \qquad (19.15)\\ (\partial/\partial v)^2 r_\alpha(z,\gamma(w)) &\ll \varrho(z,\gamma(w))^{-\alpha}(v^{-1}+|w-\gamma^{-1}(z)|^{-1})^2.\end{aligned}$$

これら評価と (19.8) から (19.13) を得る.

次に, (19.12) を考察する. 条件 $f \in B^\infty(\mathcal{F})$ から当然 $\Delta f \in B^\infty(\mathcal{F})$, つまり (19.12) の左辺は意味をもつ. いま $z \in \mathcal{F}\backslash\partial\mathcal{F}$ とすれば (19.13) を用いて

$$\begin{aligned}&(\mathcal{R}_\alpha(\Delta+\alpha(\alpha-1))f)(z)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathcal{F}\backslash D_\delta(z)} R_\alpha(z,w)(\Delta+\alpha(\alpha-1))f(w)d\mu(w)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathcal{F}\backslash D_\delta(z)} \Big\{R_\alpha(z,w)\Delta f(w) - f(w)\Delta_w R_\alpha(z,w)\Big\}d\mu(w). \qquad (19.16)\end{aligned}$$

但し, $D_\delta(z)$ は z を中心とする半径 δ の円盤である. Green 公式 を用いて

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_\alpha(\Delta+\alpha(\alpha-1))f(z)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\partial D_\delta(z)} \Big\{R_\alpha(z,w)(\partial/\partial n)_w f(w) - f(w)(\partial/\partial n)_w R_\alpha(z,w)\Big\}|dw|\\ &= -\lim_{\delta\to 0}\int_{\partial D_\delta(z)} f(w)(\partial/\partial n)_w R_\alpha(z,w)|dw|. \qquad (19.17)\end{aligned}$$

ここに $\partial/\partial n$ は通常の外法線微分である．以前 (18.3) 及び (18.13) について注意した様に，(17.5) の不変性が用いられている．一方，(19.6) の第 2 式，(19.14)–(19.15) を用いて，(19.10) と同様に

$$(\partial/\partial n)_w R_\alpha(z,w) = -\frac{1}{2\pi\delta} + O(|\log\delta|) \qquad \big(|w-z|=\delta\big). \tag{19.18}$$

これを (19.17) に挿入して (19.12) を得る．残りの $z\in\partial\mathfrak{F}$ の場合は積分 (19.11) の z についての連続性を用いればよい．

上記補題における条件 $f\in B^\infty(\mathfrak{F})$ は議論を簡単にするためのものであり，実際には等式 (19.12) はより広い範囲の函数に対して成立する．その様な場合の一つとして，次の基本的な結果を示しておく．

【補題 19.3】　仮定 $\alpha>1$ のもとに

$$(\mathfrak{R}_\alpha E)(z,s) = (s(1-s)+\alpha(\alpha-1))^{-1}E(z,s). \tag{19.19}$$

但し，

$$s：正則点，1-\alpha<\mathrm{Re}\,s<\alpha. \tag{19.20}$$

証明　左辺，つまり極限

$$\lim_{Y\to\infty}\int_{\mathfrak{F}_Y} R_\alpha(z,w)E(w,s)d\mu(w) \tag{19.21}$$

が存在することを示す．但し，$\mathfrak{F}_Y$ は (18.12) におけると同じである．このために，$R_\alpha(z,w)$ の簡単な評価を行う．勿論，$z\in\mathfrak{F}\backslash\partial\mathfrak{F}$ は固定されており，$w\in\mathfrak{F}$ は尖点の近傍にあると仮定できる．自明な分解

$$R_\alpha(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_\alpha(n+\gamma(z),w) \tag{19.22}$$

を用いるが，この内部和は $\mathrm{Im}\,\gamma(z)\ll\mathrm{Im}\,w$ に注意して (19.6) の第 3 式により

$$\ll\sum_n\left(\frac{n^2+v^2}{v\mathrm{Im}\,\gamma(z)}\right)^{-\alpha} \ll v^{1-\alpha}(\mathrm{Im}\,\gamma(z))^\alpha. \tag{19.23}$$

よって，

$$R_\alpha(z,w) \ll v^{1-\alpha}E(\alpha,z) \ll v^{1-\alpha} \qquad (w=u+iv).$$

従って，(19.21) は条件 (19.20) のもとに絶対収束する．そこで，等式 (17.17) を用いて，(19.16)–(19.18) と同様に議論し

$$\begin{aligned}(s(1-s)+\alpha(\alpha-1))\mathcal{R}_\alpha E(z,s) &= E(z,s)\\ &+\lim_{Y\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(E(w,s)\frac{\partial}{\partial v}R_\alpha(z,w)-R_\alpha(z,w)\frac{\partial}{\partial v}E(w,s)\right)_{v=Y}du.\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial v}R_\alpha(z,w) \ll v^{-\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}E(w,s) \ll v^{\mathrm{Re}\,s-1}+v^{-\mathrm{Re}\,s}.$$

前者は評価 (19.14) 及び (19.22)–(19.23) から，後者は (17.14) から従う．これらをまとめて，(19.19) を得る．

—20—
反 復 核

補題 18.1 及び 19.2 により，Δ の L^2-固有函数は積分作用素 $\mathcal{R}_\alpha$ $(\alpha > 1)$ の固有函数である．しかしながら，核 R_α は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ において二乗可積分ではなく，Hilbert–Schmidt 定理を直ちに用いる訳にはいかない．即ち，離散スペクトルばかりではなく，連続スペクトルの存在が考えられる．また，R_α は当然ながら不連続であり，その像が充分に滑らかであることは一般には期待できず，議論を進めるに不都合がある．これらの困難を除去するのが本節と次節の目的である．

先ず，漸化式

$$\mathcal{R}_{\alpha,n+1} = ((n+1)(n+2\alpha))^{-1}(\mathcal{R}_{\alpha,n}-\mathcal{R}_{\alpha+1,n}) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \quad (20.1)$$

にて $\mathcal{R}_{\alpha,n}$ を定義する．但し，$\mathcal{R}_{\alpha,0} = \mathcal{R}_\alpha$ とする．容易に，展開

$$\mathcal{R}_{\alpha,N} = \sum_{\nu=0}^{N} \theta_{\nu,N}(\alpha)\mathcal{R}_{\alpha+\nu} \tag{20.2}$$

を得る．係数 $\theta_{\nu,N}(\alpha)$ は α の有理函数であり，$\alpha > 0$ で正則である．以下では，条件

$$\alpha > 1, \quad N \geq 1$$

のもとに議論する．補題 19.2 と帰納法により任意の $f \in B^\infty(\mathcal{F})$ に対して

$$\mathcal{R}_{\alpha,N} \prod_{\nu=0}^{N} \big(\Delta + (\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu)\big) f = f. \tag{20.3}$$

特に，

$$\mathcal{R}_{\alpha,N} f = q_{\alpha,N}(\lambda) f \qquad \big(f \in B^\infty(\mathcal{F}),\, \Delta f = \lambda f\big). \tag{20.4}$$

但し，

$$\begin{aligned} q_{\alpha,N}(\lambda) &= \Big[\prod_{\nu=0}^{N} \big(\lambda + (\alpha+\nu)(\alpha+\nu-1)\big)\Big]^{-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N} \theta_{\nu,N}(\alpha)\big(\lambda + (\alpha+\nu)(\alpha+\nu-1)\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{20.5}$$

作用素 $\mathcal{R}_{\alpha,N}$ に対応する積分核 $R_{\alpha,N}(z,w)$ を求めるために $r_{\alpha,N}(z,w)$ を漸化式

$$r_{\alpha,0}(z,w) = r_\alpha(z,w), \tag{20.6}$$

$$r_{\alpha,n}(z,w) - r_{\alpha+1,n}(z,w) = (n+1)(n+2\alpha) r_{\alpha,n+1}(z,w) \quad (n \geq 0) \tag{20.7}$$

で定める．勿論，

$$r_{\alpha,N}(z,w) = \sum_{\nu=0}^{N} \theta_{\nu,N}(\alpha) r_{\alpha+\nu}(z,w). \tag{20.8}$$

そこで，(19.11)，(20.2) 及び (20.8) をまとめて

$$\mathcal{R}_{\alpha,N} f(z) = \int_{\mathcal{F}} R_{\alpha,N}(z,w) f(w)\, d\mu(w).$$

但し,

$$R_{\alpha,N}(z,w)=\sum_{\gamma\in\Gamma} r_{\alpha,N}(z,\gamma(w)). \tag{20.9}$$

また, 定義 (20.6)–(20.7) から

$$r_{\alpha,n}(z,w)=p_{\alpha,n}(\varrho(z,w)) \quad (n\geq 0). \tag{20.10}$$

但し,

$$\begin{aligned} p_{\alpha,n}(\varrho) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{8\pi^2 in!\Gamma(n+\alpha)} \\ &\quad\times \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{\Gamma(\xi+\alpha)\Gamma(\xi+\alpha+n)\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha+n)} \varrho^{-\xi-\alpha} d\xi. \end{aligned} \tag{20.11}$$

実際, $n=0$ のときこれは (19.4) であり, $p_{\alpha,n}$ は (20.6)–(20.7) と同じ漸化式を満たす.

ここで, 表記を略して,

$$\begin{gathered} R^*_\alpha = R_{\alpha,N}, \quad p^*_\alpha = p_{\alpha,N}, \quad q^*_\alpha = q_{\alpha,N}, \quad r^*_\alpha = r_{\alpha,N}, \quad \theta^*_\nu = \theta_{\nu,N}, \\ |(\partial z)^\nu F(z)| = |\big(\partial/\partial x\big)^\nu F(z)| + |\big(\partial/\partial y\big)^\nu F(z)| \end{gathered} \tag{20.12}$$

と定義する.

さて, (20.11) $(n=N)$ において積分路を $\mathrm{Re}\,\xi=-\alpha-\frac{1}{2}$ に移動すれば解る様に, $p^*(\varrho)$ は $\varrho\to 0^+$ のとき連続である. つまり, r^*_α, R^*_α は各々 $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ で連続である. しかし, 次の補題が示す様に R^*_α は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ で二乗可積分ではない.

【補題 20.1】 条件

$$\alpha>1, \quad N\geq \nu+1, \quad 0\leq\nu\leq 2 \tag{20.13}$$

のもとに

$$R^*_\alpha(z,w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q^*_\alpha(t^2+\tfrac{1}{4})(\mathrm{Im}\,z)^{\frac{1}{2}+it}(\mathrm{Im}\,w)^{\frac{1}{2}-it}dt + U_\alpha(z,w) \tag{20.14}$$

と置けば，任意の $z = x + iy,\ w = u + iv \in \mathfrak{F}$ について

$$|(\partial z)^\nu U_\alpha(z,w)| \ll y^{-\nu}\left\{(vy)^{1-\alpha} + \left(\frac{vy}{(v+y)^2}\right)^\alpha\right\}. \tag{20.15}$$

証明　先ず，分解 (19.22) にならって

$$R_\alpha^*(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} S_\alpha(z,\gamma(w)),$$
$$S_\alpha(z,w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_\alpha^*(z,n+w)$$

とおく．部分和法により

$$\begin{aligned} S_\alpha(z,w) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_\alpha^*(z,t+w)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)(\partial/\partial t) r_\alpha^*(z,t+w)dt \\ &= \left\{S_\alpha^{(0)} + S_\alpha^{(1)}\right\}(z,w). \end{aligned} \tag{20.16}$$

但し，函数 ρ は (1.17) におけると同じである．以下の議論から明らかな様に，これらの積分は絶対収束している．従って，分解

$$R_\alpha^*(z,w) = S_\alpha^{(0)}(z,w) + T_\alpha^{(0)}(z,w) + T_\alpha^{(1)}(z,w) \tag{20.17}$$

を得る．但し，

$$T_\alpha^{(0)}(z,w) = \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma \\ \gamma\notin\Gamma_\infty}} S_\alpha^{(0)}(z,\gamma(w)),$$

$$T_\alpha^{(1)}(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} S_\alpha^{(1)}(z,\gamma(w)).$$

積分 $S_\alpha^{(0)}(z,w)$ を計算するために，

$$\int_{\mathcal{H}} r_\alpha(z,w)(\operatorname{Im} w)^s d\mu(w) = (s(1-s)+\alpha(\alpha-1))^{-1}(\operatorname{Im} z)^s \qquad (1-\alpha < \operatorname{Re} s < \alpha) \tag{20.18}$$

を必要とする．この等式は (19.19) と同様にして証明できるが，ここでは別の方針を示そう．積分が絶対収束することは，(19.6) の第 1，2 式から容易に解る．そ

こで，

$$\int_{\mathcal{H}} r_\alpha(z,w)(\mathrm{Im}\,w)^s d\mu(w) = \lim_{\delta\to+0}\int_{|v-y|>\delta} r_\alpha(z,w)(\mathrm{Im}\,w)^s d\mu(w).$$

右辺に (19.4) を挿入して得られる三重積分は絶対収束して

$$\frac{1}{8\pi^2 i}\left\{\int_0^{y-\delta}+\int_{y+\delta}^{\infty}\right\}v^{s-2}\int_{(-\frac14)}\frac{\Gamma(\xi+\alpha)^2\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha)} \times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{4vy}{(u-x)^2+(v-y)^2}\right)^{\xi+\alpha}du\,d\xi\,dv$$

に等しく，更にこの内部の二重積分は

$$\begin{aligned}(4\pi vy)^{\frac12}&\int_{(-\frac14)}\frac{\Gamma(\xi+\alpha)\Gamma(\xi+\alpha-\frac12)\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha)}\left(\frac{4vy}{(v-y)^2}\right)^{\xi+\alpha-\frac12}d\xi\\ &= 2\pi i(4\pi vy)^{\frac12}\left(\frac{4vy}{(v-y)^2}\right)^{\alpha-\frac12}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\frac12)}{\Gamma(2\alpha)}\\ &\qquad\times F\left(\alpha,\alpha-\tfrac12;2\alpha;-\frac{4vy}{(v-y)^2}\right).\end{aligned}$$

ここで，(1.18) と

$$F(\alpha,\alpha-\tfrac12;2\alpha;\tau)=\left(\tfrac12(1+\sqrt{1-\tau})\right)^{1-2\alpha}\qquad\left(|\arg(1-\tau)|<\pi\right)\tag{20.19}$$

を用いて，これらをまとめれば

$$\int_{\mathcal{H}} r_\alpha(z,w)(\mathrm{Im}\,w)^s d\mu(w) = (2\alpha-1)^{-1}y^\alpha\int_0^\infty\left(\tfrac12(v+y+|v-y|)\right)^{1-2\alpha}v^{s+\alpha-2}dv$$

となり，(20.18) を得る．

従って，$1-\alpha<\mathrm{Re}\,s<\alpha$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^\infty S_\alpha^{(0)}(z,w)v^{s-2}dv &= \int_{\mathcal{H}} r_\alpha^*(z,w)(\mathrm{Im}\,w)^s d\mu(w)\\ &= \sum_{\nu=0}^{N}\theta_\nu^*(\alpha)\int_{\mathcal{H}} r_{\alpha+\nu}(z,w)(\mathrm{Im}\,w)^s d\mu(w)\end{aligned}$$

$$= q_\alpha^*(s(1-s))(\operatorname{Im} z)^s.$$

ここで，(20.5) を用いた．勿論，$S_\alpha^{(0)}(z,w) = S_\alpha^{(0)}(iy,iv)$ であるから，Mellin 逆変換により

$$S_\alpha^{(0)}(z,w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2+\tfrac14)(\operatorname{Im} z)^{\frac12+it}(\operatorname{Im} w)^{\frac12-it}dt. \tag{20.20}$$

即ち，(20.14) の右辺の第 1 項を得た．

前式で積分路を $\operatorname{Im} t = \pm\infty$ に移せば，(20.5) に注意して

$$S_\alpha^{(0)}(z,w) = \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\theta_\nu^*(\alpha)}{2\alpha+2\nu-1}\begin{cases}(\operatorname{Im} w)^{\alpha+\nu}(\operatorname{Im} z)^{1-\alpha-\nu} & (\operatorname{Im} w \le \operatorname{Im} z),\\ (\operatorname{Im} z)^{\alpha+\nu}(\operatorname{Im} w)^{1-\alpha-\nu} & (\operatorname{Im} z \le \operatorname{Im} w).\end{cases} \tag{20.21}$$

これより，条件 $z,w\in\mathfrak{F}$，$\operatorname{Im} z \ge 1$ のもとに

$$T_\alpha^{(0)}(z,w) = \sum_{\nu=0}^{N}\frac{\theta_\nu^*(\alpha)}{2\alpha+2\nu-1}(\operatorname{Im} z)^{1-\alpha-\nu}\big\{E(w,\alpha+\nu)-(\operatorname{Im} w)^{\alpha+\nu}\big\}. \tag{20.22}$$

ここで，E は Eisenstein 級数であり，また $\gamma\notin\Gamma_\infty$ であれば $\operatorname{Im}\gamma(w)\le 1$ となることを用いた．展開 (17.14) により，任意の $z,w\in\mathfrak{F}$ について

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)T_\alpha^{(0)}(z,w) = 0, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{\nu}T_\alpha^{(0)}(z,w) \ll y^{-\nu}(vy)^{1-\alpha} \quad (\nu\ge 0). \tag{20.23}$$

実際，$\operatorname{Im} z\ge 1$ であればこれらは (20.22) から従い，さもなくば，$\operatorname{Im} w$ は充分大と仮定できる故，再び (20.22) を用いればよい．

次に，$T_\alpha^{(1)}$ を考察する．このために，評価

$$|(\partial z)^\nu S_\alpha^{(1)}(z,w)| \ll y^{-\nu}\Big(\frac{vy}{(v+y)^2}\Big)^{\alpha} \quad (0\le\nu\le 2) \tag{20.24}$$

を示す．但し，ここでは最も複雑な $(\partial/\partial y)^2 S_\alpha^{(1)}(z,w)$ のみを扱うこととする（従って，$N\ge 3$）．等式 (20.10) により

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 S_\alpha^{(1)}(z,w) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\big[(p_\alpha^*)'''(\varrho)\varrho_y^2\varrho_u + (p_\alpha^*)''(\varrho)\varrho_{yy}\varrho_u + 2(p_\alpha^*)''(\varrho)\varrho_y\varrho_{uy} + (p_\alpha^*)'(\varrho)\varrho_{uyy}\big]dt. \tag{20.25}$$

但し，$\varrho = \varrho(z, t + w)$ と置いた．積分と微分の順序交換の正当性は容易に確かめられる．右辺の内，$(p_\alpha^*)'''$ を含む部分は

$$\begin{aligned} &\ll \int_0^\infty \left|(p_\alpha^*)'''\left(\frac{t^2 + (v - y)^2}{4vy}\right)\right| \left(\frac{t^2 + v^2 - y^2}{vy^2}\right)^2 \frac{t}{vy} dt \\ &\ll y^{-2} \int_0^\infty |(p_\alpha^*)'''(t^2 + \varrho(iy, iv))| \left(t^5 + (v/y - y/v)^2 t\right) dt. \end{aligned} \tag{20.26}$$

表示 (20.11) を用いれば (20.13) $(\nu = 2)$ のもとに

$$(p_\alpha^*)'''(\tau) \ll \min\left\{|\log \tau|, \tau^{-\alpha-3}\right\} \quad (\tau > 0).$$

他の部分も同様である．これらをまとめ，$(\partial/\partial y)^2 S_\alpha^{(1)}(z, w)$ は，(20.24) $(\nu = 2)$ の右辺にて評価されることが解る．

さて，(20.24) により

$$\begin{aligned} |(\partial z)^\nu T_\alpha^{(1)}(z, w)| &\ll y^{-\nu}\left(\frac{vy}{(v + y)^2}\right)^\alpha + y^{-\nu-\alpha}\left\{E(w, \alpha) - (\operatorname{Im} w)^\alpha\right\} \\ &\ll y^{-\nu}\left(\frac{vy}{(v + y)^2}\right)^\alpha + y^{-\nu-\alpha} v^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

この結果と (20.17)，(20.20)，(20.23) を組み合わせ，補題 20.1 の証明を終わる．

[附記] 初等的な等式 (20.19) は上記の議論では要である．また，後に「Selberg 跡公式」の計算に当たっても必要となる．特殊函数論の教科書，例えば [8] 等を参照せよ．

—21—
Hilbert-Schmidt 核

等式 (17.14) と (20.14) をもとに，函数

$$C_\alpha(z, w) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty q_\alpha^*(t^2 + \tfrac{1}{4}) E(z, \tfrac{1}{2} + it) E(w, \tfrac{1}{2} - it) dt + \frac{3}{\pi} q_\alpha^*(0) \tag{21.1}$$

を導入し，

$$\tilde{R}_\alpha(z,w) = R_\alpha^*(z,w) - C_\alpha(z,w) \tag{21.2}$$

とおく．核 $\tilde{R}_\alpha$ は (20.15) により，$\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ 上の滑らかな有界函数と期待される．次の補題ではこのことを確かめ，しかも $\tilde{R}_\alpha$ の引き起こす作用は，Δ の各 L^2-固有空間を動かさないことも見る．従って特に，$\tilde{R}_\alpha$ は Hilbert–Schmidt 核であるが，そのスペクトルが Δ の離散スペクトルに一致することは次節で示す．

【補題 21.1】 仮定 (20.13) のもとに，$\Delta f = \lambda f$，$f \in B^\infty(\mathfrak{F})$ であれば

$$\int_{\mathfrak{F}} \tilde{R}_\alpha(z,w) f(w) d\mu(w) = q_\alpha^*(\lambda) f(z). \tag{21.3}$$

また，$z = x+iy$，$w = u+iv \in \mathfrak{F}$ について一様に

$$\begin{aligned} &|(\partial z)^\nu \tilde{R}_\alpha(z,w)| \\ &\ll y^{-\nu}\left\{(vy)^{1-\alpha} + (vy)^{-N+\frac{1}{2}\nu}\log^A(2vy) + \left(\frac{vy}{(v+y)^2}\right)^\alpha\right\}. \end{aligned} \tag{21.4}$$

証明　評価 (21.4) を先に確かめる．積分 (21.1) が絶対収束することは，これからの議論のなかで明らかとなる．また，(21.1) の常数項の意味も同様である．

展開 (17.14) を

$$E(z,s) = y^s + \varphi_\Gamma(s) y^{1-s} + \tilde{E}(z,s) \tag{21.5}$$

と書き，(1.14) により

$$\tilde{E}(z,s) = \varphi_\Gamma(s)\tilde{E}(z,1-s)$$

であることを注意する．すると (21.1) は変形されて

$$\begin{aligned} C_\alpha(z,w) = &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2+\tfrac{1}{4}) y^{\frac{1}{2}+it} v^{\frac{1}{2}-it} dt \\ &+ C_\alpha^{(0)}(z,w) + C_\alpha^{(1)}(z,w) + C_\alpha^{(1)}(w,z) + C_\alpha^{(2)}(z,w). \end{aligned} \tag{21.6}$$

但し，

$$C_\alpha^{(0)}(z,w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2+\tfrac{1}{4})(vy)^{\frac{1}{2}-it}\varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2}+it)dt + \frac{3}{\pi}q_\alpha^*(0),$$

$$C_\alpha^{(1)}(z,w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2+\tfrac{1}{4})v^{\frac{1}{2}-it}\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it)dt, \tag{21.7}$$

$$C_\alpha^{(2)}(z,w) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2+\tfrac{1}{4})\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it)\tilde{E}(w,\tfrac{1}{2}-it)dt. \tag{21.8}$$

等式 (20.14)，(21.2)，(21.6) から

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\alpha(z,w) &= U_\alpha(z,w) - C_\alpha^{(0)}(z,w)\\ &\quad - C_\alpha^{(1)}(z,w) - C_\alpha^{(1)}(w,z) - C_\alpha^{(2)}(z,w).\end{aligned} \tag{21.9}$$

各 $C_\alpha^{(j)}$ の偏微分を評価せねばならないが，当然 $vy \geq 1$ と仮定して議論をすすめても一般性を失わない．

先ず，$j=0$ の場合は簡単である．積分路を $\operatorname{Im} t = -\infty$ に移動して，(1.13) と (20.5) から

$$C_\alpha^{(0)}(z,w) = \sum_{\nu=0}^{N} c_{\nu,N}(\alpha)(vy)^{1-\alpha-\nu}.$$

よって，任意の $z,w \in \mathfrak{F}$ について一様に

$$|(\partial z)^\nu C_\alpha^{(0)}(z,w)| \ll y^{-\nu}(vy)^{1-\alpha}. \tag{21.10}$$

次に $j=1,2$ の場合を扱うが，関連する微分は (21.7)–(21.8) の積分と交換可能である．これは，以下の議論で得られる評価から明らかである．よって，函数 $\tilde{E}(z,s)$ の偏導関数が問題となるが，(17.17) から

$$\Delta\tilde{E}(z,s) = s(1-s)\tilde{E}(z,s) \tag{21.11}$$

である故，

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it) = -\Big[y^{-2}(t^2+\tfrac{1}{4}) + \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2\Big]\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it), \tag{21.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it) = -\int_y^\infty \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it)dy. \tag{21.13}$$

つまり，$(\partial/\partial x)^\nu\tilde{E}(z,\frac{1}{2}+it)$ を評価すれば足りる．このために，(17.18) で部分積

分を行い

$$K_{it}(y) = -i2^{it}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+it)}{\pi^{\frac{1}{2}}y^{1+it}}\tilde{K}_{it}(y), \tag{21.14}$$

$$\tilde{K}_{it}(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi e^{iy\xi}}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}+it}}d\xi. \tag{21.15}$$

積分路を $\mathrm{Im}\,\xi = 1/(1+|t|)$ に移して

$$\tilde{K}_{it}(y) \ll \exp(-y/(1+|t|)) \qquad \big(y>0,\ \mathrm{Im}\,t \le \tfrac{1}{4}\big). \tag{21.16}$$

これにより特に $\tilde{E}(z,\frac{1}{2}+it)$ は領域 $\mathrm{Im}\,t \le 0$ にて正則であり，且つ

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\nu}\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it)\\
&= \frac{(\frac{1}{2}+it)(2\pi i)^{\nu}}{\pi i\zeta(1+2it)y^{\frac{1}{2}+it}}\sum_{n\neq 0} n^{\nu}|n|^{-1}\sigma_{-2it}(|n|)\tilde{K}_{it}(2\pi|n|y)e(nx)\\
&\ll \frac{(1+|t|)y^{-\frac{1}{2}+\mathrm{Im}\,t}}{|\zeta(1+2it)|}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu-1}d(n)\exp\Big(-\frac{2\pi yn}{1+|t|}\Big)\\
&\ll \Big(\frac{1+|t|}{y}\Big)^{\nu+1}\Big(1+\log^2\frac{1+|t|}{y}\Big)\frac{y^{\frac{1}{2}+\mathrm{Im}\,t}}{|\zeta(1+2it)|}\exp\Big(-\frac{\pi y}{1+|t|}\Big).
\end{aligned} \tag{21.17}$$

ここで，(1.12) を用いた．表示 (21.7) に戻り，偏微分 $(\partial/\partial x)^{\nu}$ と積分の順序を交換し，更に積分路を $\mathrm{Im}\,t = -\infty$ に移動する．仮定 $N \ge 4$，$0 \le \nu \le 2$ 及び評価 (4.14) に注意して，

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\nu}C_{\alpha}^{(1)}(z,w) \ll v^{1-\alpha}\exp(-y/(\alpha+N))$$

を得る．また，(21.12)–(21.13) により，$(\partial/\partial y)^{\nu}C_{\alpha}^{(1)}(z,w)$ も同じく評価できる．従って，

$$|(\partial z)^{\nu}C_{\alpha}^{(1)}(z,w)| \ll v^{1-\alpha}\exp(-y/(\alpha+N)). \tag{21.18}$$

全く同様にして

$$|(\partial z)^{\nu}C_{\alpha}^{(1)}(w,z)| \ll y^{1-\alpha-\nu}\exp(-v/(\alpha+N)). \tag{21.19}$$

一方，$j=2$ の場合は (21.17) を $t\in\mathbb{R}$ について用いて

$$
\begin{aligned}
&|(\partial z)^{\nu} C_{\alpha}^{(2)}(z,w)| \\
&\ll y^{-\nu}(vy)^{-\frac{1}{2}}\log^4(2vy)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\pi(v+y)/(1+|t|))\log^4(2+|t|)}{|\zeta(1+2it)|^2(1+|t|)^{2N-\nu}}dt \\
&\ll y^{-\nu}(vy)^{-N+\frac{1}{2}\nu}\log^A(2vy).
\end{aligned}
\tag{21.20}
$$

評価 (20.15)，(21.10)，(21.18)–(21.20) をまとめて，(21.4) の証明を終わる．

次に，(21.3) を示そう．これは，等式 (20.4) に注意して，

$$
\int_{\mathcal{F}} C_{\alpha}(z,w)f(w)d\mu(w)=0 \qquad \bigl(f\in B^{\infty}(\mathcal{F}),\ \Delta f=\lambda f\bigr). \tag{21.21}
$$

と同義である．左辺に定義 (21.1) を挿入すると， 三重積分を得る．何故ならば，Green 公式によって容易に確かめられるが，$\langle f,1\rangle=0$ となるからである．この積分は (21.17) ($\nu=0$) により絶対収束である．積分の順序を交換して，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}} C_{\alpha}(z,w)f(w)d\mu(w) \\
&\qquad=\lim_{\delta\to+0}\int_{\substack{-\infty \\ |t^2-\kappa^2|>\delta}}^{\infty} q_{\alpha}^{*}(t^2+\tfrac{1}{4})E(z,\tfrac{1}{2}+it)\mathcal{E}(t,f)dt.
\end{aligned}
$$

但し，$\lambda=\kappa^2+\frac{1}{4}$ ($\kappa>0$) であり，$\mathcal{E}(t,f)$ は (18.16) で定義されている．勿論，この場合 (18.16) の極限は通常の極限に一致する． 従って，

$$
\mathcal{E}(t,f)=0 \qquad \bigl(t^2\neq\kappa^2\bigr). \tag{21.22}
$$

を示せば足りる．しかるに，自明な関係式

$$
(t^2-\kappa^2)\mathcal{E}(t,f)=\int_{\mathcal{F}}\bigl[f(w)\Delta E(w,\tfrac{1}{2}-it)-E(w,\tfrac{1}{2}-it)\Delta f(w)\bigr]d\mu(w),
$$

に Green 公式を応用して，

$$
\begin{aligned}
&(t^2-\kappa^2)\mathcal{E}(t,f) \\
&=-\int_{\partial\mathcal{F}}[f(w)v\frac{\partial}{\partial n}E(w,\tfrac{1}{2}-it)-E(w,\tfrac{1}{2}-it)v\frac{\partial}{\partial n}f(w)]\frac{|dw|}{v}
\end{aligned}
$$

$$= 0.$$

つまり，(21.21) が確かめられた．

[附記]　上記の議論における評価 (4.14) の重要性は強調しておく必要がある．一般的な $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ の離散部分群については対応する Eisenstein 級数の解析接続，評価は困難である ([3, 第 6 章] を見よ)．特に，(4.14) の類似は，数論的な離散部分群以外では望み難い．つまり，上記ではモジュラー群とリーマンゼータ函数との特別な関係を有効に用いた訳である．勿論，(4.14) が素数定理をもたらすこともこの関係において注目すべきである．なお，評価 (4.14) の代わりに (9.5) を用いても特に得るものはない．

—22—
スペクトル分解

定理 18.1 を証明する準備は補題 21.1 にて整った．

【補題 22.1】　線形集合 $B^\infty(\mathcal{F})$ に制限するとき，Δ のスペクトルは離散的である．

証明　Bessel 不等式の応用である．任意の有限正規直交系 $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ $(\Delta f_\lambda = \lambda f)$ について，

$$0 \le \int_{\mathcal{F}} |\tilde{R}_\alpha(z,w) - \sum_{\lambda\in\Lambda} q_\alpha^*(\lambda) f_\lambda(z)\overline{f_\lambda(w)}\,|^2 d\mu(w).$$

等式 (21.3) に注意して

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} q_\alpha^*(\lambda)^2 |f_\lambda(z)|^2 \le \int_{\mathcal{F}} |\tilde{R}_\alpha(z,w)|^2 d\mu(w). \tag{22.1}$$

評価 (21.4) $(\nu = 0)$ により，右辺は $z \in \mathcal{F}$ について一様に有界である．更に積分

して

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} q_\alpha^*(\lambda)^2 \le \int_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}} |\tilde{R}_\alpha(z,w)|^2 d\mu(w)d\mu(z) < \infty. \tag{22.2}$$

つまり，補題の結果を得る．

【補題 22.2】　正規直交系 $\{\psi_j : j=0,1,2,\cdots\}$ は (18.14)–(18.15) にある通りとする．条件

$$\alpha \ge \tfrac{3}{2}, \quad N \ge 9 \tag{22.3}$$

のもとに展開

$$R_\alpha^*(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} q_\alpha^*(\lambda_j)\psi_j(z)\overline{\psi_j(w)} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2+\tfrac{1}{4})E(z,\tfrac{1}{2}+it)E(w,\tfrac{1}{2}-it)dt \tag{22.4}$$

が成立する．収束性は一様且つ絶対である．

証明　定義 (21.2) により展開

$$\tilde{R}_\alpha(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} q_\alpha^*(\lambda_j)\psi_j(z)\overline{\psi_j(w)} \tag{22.5}$$

の成立と収束性を吟味すればよい．

先ず，(20.13) のもとに (22.1) が成立し，また $q_\alpha^*(\lambda) \approx \lambda^{-N-1}$ である故，(22.5) の右辺 $D_\alpha(z,w)$ は条件 $\alpha > 1$，$N \ge 3$ のもとに $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上で一様且つ絶対収束している．そこで，

$$\hat{R}_\alpha(z,w) = \tilde{R}_\alpha(z,w) - D_\alpha(z,w) \tag{22.6}$$

とおく．条件 (22.3) のもとに $w=u+vi$, $z=x+yi\in\mathcal{F}$ について一様に

$$|(\partial z)^\nu \hat{R}_\alpha(z,w)| \ll y^{-\nu}\Big\{(vy)^{-\frac{1}{2}} + \Big(\frac{vy}{(v+y)^2}\Big)^\alpha\Big\} \quad (0\le\nu\le 2) \tag{22.7}$$

であることを示そう．このためには，粗い評価

$$|(\partial z)^\nu \psi_j(z)| \ll y^{-\nu-\frac{1}{2}} \lambda_j^{\nu+2} \quad (0 \le \nu \le 2,\, z \in \mathfrak{F}) \tag{22.8}$$

を得れば充分である．実際，この評価と (22.2) $(N = 1)$ により，条件 $\alpha > 1$, $N \ge \nu + 7$ のもとに

$$\begin{aligned} |(\partial z)^\nu D_\alpha(z,w)| &\ll y^{-\nu}(vy)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-4} \\ &\ll y^{-\nu}(vy)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{22.9}$$

となり，(21.4) と組み合わせて (22.7) を得る．

さて，条件 (20.13) のもとに (21.3) から

$$q_\alpha^*(\lambda_j)|(\partial z)^\nu \psi_j(z)| \le \int_{\mathcal{F}} |(\partial z)^\nu \tilde{R}_\alpha(z,w)||\psi_j(w)|d\mu(w). \tag{22.10}$$

評価 (21.4) $(N = \nu + 1)$ を用いて

$$\begin{aligned} &|(\partial z)^\nu \psi_j(z)|^2 \\ &\ll \lambda_j^{2\nu+4} \int_{\mathcal{F}} \left|(\partial z)^\nu \tilde{R}_\alpha(z,w)\right|^2 d\mu(w) \\ &\ll \lambda_j^{2\nu+4} y^{-2\nu} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \left[(vy)^{2(1-\alpha)} + (vy)^{-\nu-2} + \left(\frac{vy}{(v+y)^2}\right)^{2\alpha}\right] v^{-2} dv \\ &\ll \lambda_j^{2\nu+4} y^{-2\nu} \left(y^{2(1-\alpha)} + y^{-1}\right). \end{aligned} \tag{22.11}$$

即ち，(22.8) が確かめられた．

等式 (22.5) が成立しないと仮定し，矛盾を導こう．このために，

$$\hat{R}_\alpha(z,w) = \overline{\hat{R}_\alpha(w,z)}$$

に注意する．実際，定義 (19.3), (20.8), (20.9), (20.12), (21.2), (22.6) からこれは明らかである．また，評価 (22.7) により $\hat{R}_\alpha(z,w)$ は連続且つ有界な函数である．Hilbert–Schmidt 定理により，曲面 $\mathfrak{F}$ 上の積分方程式

$$\int_{\mathcal{F}} \hat{R}_\alpha(z,w) f(w) d\mu(w) = \lambda f(z) \tag{22.12}$$

は自明でない解 $f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ をもつ．それらのなす線形集合を L_λ とする．勿論 L_λ は $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ の有限次元部分空間である．しかも，$L_\lambda \subseteq C^2(\mathcal{F})$ でもある．あるいは，(22.7) からより詳しく

$$|(\partial z)^\nu f(z)| \ll y^{-\nu-\frac{1}{2}} \quad (0 \le \nu \le 2,\ z \in \mathcal{F}). \tag{22.13}$$

これは，(22.10)–(22.11) と同様な議論で導かれる．部分空間 L_λ において作用素 Δ は対称である．即ち，

$$\Delta L_\lambda \subseteq L_\lambda \tag{22.14}$$

且つ

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle \qquad \big(f,\, g \in L_\lambda\big). \tag{22.15}$$

前者を示そう．等式 (22.12) の両辺に Δ を作用させ，評価 (22.7) により

$$\int_{\mathcal{F}} \Delta_z \hat{R}_\alpha(z,w) f(w) d\mu(w) = \lambda \Delta f(z). \tag{22.16}$$

ここで，

$$\Delta_z \hat{R}_\alpha(z,w) = \Delta_w \hat{R}_\alpha(z,w)$$

である．上記の $\hat{R}_\alpha$ に関する定義の連鎖から，この等式は $\hat{R}_\alpha$ を D_α，C_α，R_α^* に置き換えたものから従う．各々を確かめよう．先ず，D_α の場合は，評価 (22.8) により Δ を和の各項ごとに作用させ得ることから容易に解る．次の C_α の場合も同様である．更に，R_α^* の場合は (19.2) と Δ の不変性に帰着される．よって，(22.16) は

$$\int_{\mathcal{F}} \Delta_w \hat{R}_\alpha(z,w) f(w) d\mu(w) = \lambda \Delta f(z)$$

と変形され，Green 公式を用いて

$$\int_{\mathcal{F}} \hat{R}_\alpha(z,w) \Delta f(w) d\mu(w) = \lambda \Delta f(z).$$

しかるに，(22.13) により $\Delta f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ は明らか．つまり，(22.14) を得た．一方，(22.15) はやはり (22.13) と Green 公式により得られる．従って，ある自明で

ない $f \in L_\lambda$ と $\lambda' \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\Delta f = \lambda' f$$

となる．ここで，$\lambda' \neq 0$ である．さもなくば，補題 18.1 により f は常数，更に (22.13) ($\nu = 0$) から $f \equiv 0$ となり，矛盾である．そこで再び補題 18.1 により $f \in B^\infty(\mathcal{F})$，つまり $\lambda' = \lambda_j$ なる番号 j がなければならない．特に，

$$\int_{\mathcal{F}} \tilde{R}_\alpha(z,w) f(w) d\mu(w) = q_\alpha^*(\lambda') f(z)$$

且つ

$$\int_{\mathcal{F}} D_\alpha(z,w) f(w) d\mu(w) = q_\alpha^*(\lambda') f(z).$$

これらは (22.12) と矛盾する．以上から (22.5) を得る．収束性の吟味は上記の議論に含まれている．

さて，$f \in B^\infty(\mathcal{F})$ を任意として

$$f^* = \prod_{\nu=0}^{N} (\Delta + (\alpha+\nu)(\alpha+\nu-1)) f$$

とおく．但し，(22.3) を仮定する．等式 (20.3) と (22.4) により，

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_\alpha^*(\lambda_j) \langle f^*, \psi_j \rangle \psi_j(z) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_\alpha^*(t^2 + \tfrac{1}{4}) \mathcal{E}(t, f^*) E(z, \tfrac{1}{2} + it) dt.$$

但し，$\mathcal{E}$ は (18.16) で定義されるが，ここでは

$$\mathcal{E}(t, f^*) = \int_{\mathcal{F}} f^*(z) E(z, \tfrac{1}{2} - it)\, d\mu(z).$$

作用素 Δ は対称である故，

$$\langle f^*, \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j^* \rangle = q_\alpha^*(\lambda_j)^{-1} \langle f, \psi_j \rangle.$$

また，Green 公式を用いて

$$\mathcal{E}(t, f^*) = q_\alpha^*(t^2 + \tfrac{1}{4})^{-1} \mathcal{E}(t, f). \tag{22.17}$$

つまり，$B^{\infty}(\mathfrak{F})$ 上にて

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\langle f,\psi_j\rangle\psi_j(z)+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(t,f)E(z,\tfrac{1}{2}+it)dt. \tag{22.18}$$

函数 $\mathcal{E}(t,f)$ は (22.17) により当然 $L^2(0,\infty)$ の元である．従って，(18.15) は殆ど証明されたことになる．

【補題 22.3】 任意の $\eta\in L^2(0,\infty)$ について

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^T\eta(t)E(z,\tfrac{1}{2}+it)dt$$

は $L^2(\mathfrak{F},d\mu)$ で存在する．即ち，$\mathfrak{E}\subseteq L^2(\mathfrak{F},d\mu)$ である．この極限を $H(z)$ と書けば，

$$\langle H,\psi_j\rangle=0\quad\big(j=0,1,\cdots\big) \tag{22.19}$$

且つ

$$\int_{\mathfrak{F}}|H(z)|^2d\mu(z)=2\pi\int_0^{\infty}|\eta(t)|^2dt. \tag{22.20}$$

証明 勿論，η は有界な台をもつ C^{∞} 級の函数と仮定できる．このとき，(22.19) $(j\geq 1)$ は (21.22) に帰着されるが $j=0$ の場合は次の様に議論する．展開 (17.14) により

$$\begin{aligned}H(z)&=\int_0^{\infty}\eta(t)E(z,\tfrac{1}{2}+it)dt\\&=y^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\eta(t)y^{it}dt+y^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\eta(t)\varphi_{\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it)y^{-it}dt+O(e^{-y}).\end{aligned} \tag{22.21}$$

通常の Parseval 等式を用いて，

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{F}}\left|y^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\eta(t)y^{it}dt\right|^2d\mu(z)&\leq\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\eta(t)e^{it\log y}dt\right|^2y^{-1}dy\\&=2\pi\int_0^{\infty}|\eta(t)|^2dt.\end{aligned}$$

また，(1.14) に注意して (22.21) の φ_{Γ} を含む項も同様に扱える故，$H\in L^2(\mathfrak{F},d\mu)$

を得る．この事実から，

$$\langle H,1\rangle=\lim_{Y\to\infty}\int_{\mathcal{F}_Y}H(z)d\mu(z)$$

$$=\lim_{Y\to\infty}\int_0^\infty\eta(t)\int_{\mathcal{F}_Y}E(z,\tfrac12+it)d\mu(z)dt$$

$$=\lim_{Y\to\infty}\int_0^\infty\frac{\eta(t)}{t^2+\frac14}\int_{\mathcal{F}_Y}\Delta E(z,\tfrac12+it)d\mu(z)dt=0.$$

何故ならば，Green 公式により最後の積分は $O(Y^{-\frac12})$ である．

次に (22.20) を証明する．当然ながら，

$$\|H\|^2=\lim_{Y\to\infty}\int_{\mathcal{F}_Y}\left|\int_0^\infty\eta(t)E(z,\tfrac12+it)dt\right|^2d\mu(z)$$

$$=\lim_{Y\to\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}[E](t_1,t_2;Y)dt_1dt_2.$$

但し，

$$[E](t_1,t_2;Y)=\int_{\mathcal{F}_Y}E_1E_2d\mu(z),$$

$$E_1=E(z,\tfrac12+it_1),\quad E_2=E(z,\tfrac12-it_2).$$

もしも $t_1\neq\pm t_2$ であれば，Green 公式により

$$[E](t_1,t_2;Y)=(t_1^2-t_2^2)^{-1}\int_{\mathcal{F}_Y}\big[E_2\Delta E_1-E_1\Delta E_2\big]d\mu(z)$$

$$=-(t_1^2-t_2^2)^{-1}\int_{-\frac12}^{\frac12}\Big[E_2\frac{\partial}{\partial y}E_1-E_1\frac{\partial}{\partial y}E_2\Big]dx\quad(y=Y).$$

この最後の積分は

$$i(t_1+t_2)Y^{i(t_1-t_2)}+i(t_1-t_2)\varphi_\Gamma(\tfrac12-it_2)Y^{i(t_1+t_2)}$$

$$-i(t_1-t_2)\varphi_\Gamma(\tfrac12+it_1)Y^{-i(t_1+t_2)}$$

$$-i(t_1+t_2)\varphi_\Gamma(\tfrac12+it_1)\varphi_\Gamma(\tfrac12-it_2)Y^{-i(t_1-t_2)}$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\tilde{E}_2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{E}_1-\tilde{E}_1\frac{\partial}{\partial y}\tilde{E}_2\right]dx.$$

ここで $\tilde{E}$ は (21.5) によって定義されている．等式 (21.11) に注意し，Green 公式を逆方向に用いて，

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\tilde{E}_2\frac{\partial}{\partial y}\tilde{E}_1-\tilde{E}_1\frac{\partial}{\partial y}\tilde{E}_2\right]dx=\int_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_Y}\left[\tilde{E}_2\Delta\tilde{E}_1-\tilde{E}_1\Delta\tilde{E}_2\right]d\mu(z)$$
$$=(t_1^2-t_2^2)\int_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_Y}\tilde{E}_1\tilde{E}_2d\mu(z).$$

これらから

$$\begin{aligned}&[E](t_1,t_2;Y)\\&=\frac{Y^{i(t_1-t_2)}-Y^{-i(t_1-t_2)}}{i(t_1-t_2)}+\frac{Y^{i(t_2-t_1)}}{i(t_1-t_2)}\left(1-\varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2}+it_1)\varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2}-it_2)\right)\\&-\frac{Y^{-i(t_1+t_2)}}{i(t_1+t_2)}\varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2}+it_1)+\frac{Y^{i(t_1+t_2)}}{i(t_1+t_2)}\varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2}-it_2)\\&-\int_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_Y}\tilde{E}_1\tilde{E}_2d\mu(z).\end{aligned}\tag{22.22}$$

連続性によりこれは任意の実数 t_1, t_2 に対して成立する．そこで，部分積分を用いて

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}[E](t_1,t_2;Y)dt_1dt_2\\&\quad=2\int_0^\infty\int_0^\infty\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\frac{\sin((t_1-t_2)\log Y)}{t_1-t_2}dt_1dt_2+O\left((\log Y)^{-1}\right)\\&\quad=2\int_0^\infty\int_0^\infty|\eta(t_1)|^2\frac{\sin((t_1-t_2)\log Y)}{t_1-t_2}dt_1dt_2+O\left((\log Y)^{-1}\right)\\&\quad=2\pi\int_0^\infty|\eta(t)|^2dt+O\left((\log Y)^{-1}\right).\end{aligned}$$

従って，(22.20) を得る．

以上の議論からスペクトル分解 (18.14) を得る．実際，等式 (22.18) と補題 22.3

により

$$B^\infty(\mathfrak{F}) \subseteq \mathbb{C} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{E} \subseteq L^2(\mathfrak{F}, d\mu).$$

集合 $B^\infty(\mathfrak{F})$ は $L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ で稠密である故，これは (18.14) と同義である．

展開 (18.15) を示す．分解 (18.14) により，任意の $f \in L^2(\mathfrak{F}, d\mu)$ について，ノルム収束の意味で，

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \psi_j(z) + \int_0^\infty \eta(t) E(z, \tfrac{1}{2} + it) dt \tag{22.23}$$

且つ

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\omega_j|^2 + 2\pi \int_0^\infty |\eta(t)|^2 dt. \tag{22.24}$$

ここに，$\omega_j \in \mathbb{C}$，$\eta \in L^2(0, \infty)$ である．勿論

$$\omega_j = \langle f, \psi_j \rangle \qquad \big(j = 0, 1, \cdots\big).$$

函数 η を定めるために，Γ-保型函数 f_Y を $f_Y(z) = f(z)$ $(z \in \mathfrak{F}_Y)$ 且つ $f_Y(z) = 0$ $(z \in \mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F}_Y)$ にて定義する．区間 $[\tau_1, \tau_2]$ に対応する部分空間 $\mathfrak{E}$ 内の元と f_Y との内積をとれば，(22.20) と (22.23) $(f = f_Y, \eta = \eta_Y)$ により，

$$\int_{\mathfrak{F}_Y} f(z) \int_{\tau_1}^{\tau_2} E(z, \tfrac{1}{2} - it) dt d\mu(z) = 2\pi \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta_Y(t) dt.$$

勿論，左辺の積分の順序は交換できる故，殆ど全ての $t \in \mathbb{R}$ について

$$\eta_Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}_Y} f(z) E(z, \tfrac{1}{2} - it) d\mu(z).$$

一方，(22.24) にて f の代わりに $f - f_Y$ とすれば，明らかに

$$2\pi \int_0^\infty |\eta(t) - \eta_Y(t)|^2 dt \le \|f - f_Y\|^2.$$

即ち，

$$\eta(t) = \mathcal{E}(t, f).$$

従って，(18.15) を得た．以上で定理 18.1 の証明を終わる．

[附記] Hilbert–Schmidt 定理については [2] [15] を見よ．上記の議論の出発点は，$\mathcal{R}_\alpha$ が $\Delta+\alpha(\alpha-1)$ の左逆作用素であること (補題 19.2) にあったが，(22.18) により

$$(\Delta+\alpha(\alpha-1))\mathcal{R}_\alpha f = f \qquad (f \in B^\infty(\mathcal{F}))$$

でもある．即ち，函数 R_α は実際に Δ の解核である．従って，(20.1) は「Hilbert 等式」

$$\mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_\beta = (\alpha(\alpha-1)-\beta(\beta-1))\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta \tag{22.25}$$

により，$\mathcal{R}_{\alpha,N} = \mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_{\alpha+1}\cdots\mathcal{R}_{\alpha+N}$ と同等である．なお，議論の先頭に積分変換

$$\int_{\mathcal{H}} k(\varrho(z,w))f(w)d\mu(w)$$

と Δ との関係（函数 k の Harish-Chandra–Selberg 変換）を置けば，定理 18.1 の証明の内，詳細な評価を含む議論は短縮できる．しかし，上記の如き計算練習も無意味ではなかろう．

—23—
Selberg 跡公式

本節以下数節にわたり定理 18.1 の美しい帰結である「跡公式」について述べる．このために，

$$\begin{aligned} R(z,w) &= R_\alpha(z,w) - R_\beta(z,w), \\ r(z,w) &= r_\alpha(z,w) - r_\beta(z,w), \\ p(\varrho) &= p_\alpha(\varrho) - p_\beta(\varrho) \end{aligned} \tag{23.1}$$

とおく．勿論，$r(z,w) = p(\varrho(z,w))$ であり，

$$R(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} r(z,\gamma(w)). \tag{23.2}$$

このとき，定理 18.1 から，展開 (22.4) よりも詳しく次の結果を得る．

【補題 23.1】 任意の $1 < \alpha < \beta$ について，$\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 上で絶対且つ一様収束する展開

$$R(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} k(\kappa_j)\psi_j(z)\overline{\psi_j(w)} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(t)E(z,\tfrac{1}{2}+it)E(w,\tfrac{1}{2}-it)dt \tag{23.3}$$

が成立する．但し，$\kappa_0 = \frac{1}{2}i$,

$$k(t) = k_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{(\alpha-\frac{1}{2})^2+t^2} - \frac{1}{(\beta-\frac{1}{2})^2+t^2}. \tag{23.4}$$

証明　条件 $N = 1$, $\nu = 0$ のもとに，第 21 節の議論はそのまま函数

$$\tilde{R}(z,w) = R(z,w) - C(z,w) \tag{23.5}$$

に対して適用できる．但し，

$$C(z,w) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(t)E(z,\tfrac{1}{2}+it)E(w,\tfrac{1}{2}-it)dt + \frac{3}{\pi}k(\tfrac{1}{2}i). \tag{23.6}$$

特に，評価 (21.4) ($\nu = 0$) に対応する結果から，$\tilde{R}(z,w)$ は $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 上で連続且つ一様に有界である．従って，定理 18.1 を $\tilde{R}(z,w)$ に，例えば変数 z について，応用できる．等式 (21.3) と同様に

$$\langle \tilde{R}(\cdot,w),\psi_j\rangle = \int_{\mathcal{F}} \tilde{R}(z,w)\overline{\psi_j(z)}d\mu(z) = k(\kappa_j)\overline{\psi_j(w)} \qquad (j \geq 1).$$

一方，変数 w を固定するとき，評価 (21.17) ($\nu = 0$) から

$$k(t)E(w,\tfrac{1}{2}-it) \in L^2(0,\infty).$$

従って，(18.1) 及び (22.19) ($j = 0$) により

$$\langle \tilde{R}(\cdot,w),1\rangle = \langle R(\cdot,w),1\rangle - k(\tfrac{1}{2}i).$$

ここで，(20.18) に戻り $s=0$ とすれば

$$\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}=\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\gamma(\mathcal{F})}r_\alpha(z,w)d\mu(z)=\int_{\mathcal{F}}R_\alpha(z,w)d\mu(z).$$

つまり，$\langle\tilde{R}(\cdot,w),1\rangle=0$ である．更に，補題 19.3 及び 22.3 から $\mathcal{E}(t,\tilde{R}(\cdot,w))=0$ も従う．よって，ノルム収束の意味で

$$\tilde{R}(z,w)=\sum_{j=1}^{\infty}k(\kappa_j)\psi_j(z)\overline{\psi_j(w)}$$

を得る．この結果に Mercer の定理を適用して証明を終わる．

特に，核 $\tilde{R}$ の「跡」は

$$\int_{\mathcal{F}}\tilde{R}(z,z)d\mu(z)=\sum_{j=1}^{\infty}k(\kappa_j) \tag{23.7}$$

と表示できる．しかるに，$\tilde{R}$ は (23.5)–(23.6) なる具体的な表示にて定義されている故，左辺は Γ に固有の対象物によって書き下せるはずである．以下にこのことを確かめる．結論として得られる等式は Γ の構造と離散固有値 $\{\kappa_j\}$ を結び付けるものであり,「Selberg 跡公式」(詳しくは「解核跡公式」) とよばれる．

先ず始めに，Γ の元をその固定点の位置によって分類し，

$$\Gamma=\mathcal{C}^{(0)}\cup\mathcal{C}^{(1)}\cup\mathcal{C}^{(2)}\cup\mathcal{C}^{(e)} \tag{23.8}$$

とおく．但し，$\mathcal{C}^{(0)}=\{1\}$ (単位元) であり，他の三集合の元の固定点は各々，唯一個（放物元），$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上の相異なる二点（双曲元），$\mathcal{H}$ 及び下半平面 $\overline{\mathcal{H}}$ 上に各一個（楕円元），であるとする．和 (23.2) をこれらの部分集合に制限して，各々を $R^{(0)}$，$R^{(1)}$，$R^{(2)}$，$R^{(e)}$ とする．勿論，$\mathcal{C}^{(0)}\cup\mathcal{C}^{(1)}\supset\Gamma_\infty$ である故，補題 20.1 の証明から $R^{(2)}$，$R^{(e)}$ は共に $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上で有界である．そこで，(23.7) の左辺を

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}}\tilde{R}(z,z)d\mu(z)&=\int_{\mathcal{F}}[R^{(0)}+R^{(2)}+R^{(e)}](z,z)d\mu(z)\\&\quad+\lim_{Y\to\infty}\int_{\mathcal{F}_Y}[R^{(1)}-C](z,z)d\mu(z)\end{aligned} \tag{23.9}$$

と分解できる．函数 $R^{(0)}(z,z)$ については，(18.1) 及び (19.6) の第 1 式から

$$\int_{\mathcal{F}} R^{(0)}(z,z)d\mu(z) = -\frac{1}{6}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\alpha) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\beta)\right). \tag{23.10}$$

函数 $R^{(1)}(z,z)$ の寄与を計算するために $\mathcal{C}^{(1)}$ の構造を調べよう．集合 $\mathcal{C}^{(1)}$ の任意の元 ω の固定点 x_0 は有理数か尖点であるから，$\gamma(x_0) =$ 尖点 となる $\mathit{\Gamma} \ni \gamma$ が存在する．よって $\mathit{\Gamma}$ の元 $\gamma\omega\gamma^{-1}$ は尖点を固定点にもつ故，$\omega = \gamma^{-1}\tau^n\gamma$　($\tau : z \mapsto z+1; \mathbb{Z} \ni n \neq 0$) と書ける．つまり，$\omega$ は τ のある冪と $\mathit{\Gamma}$-共役である．元 τ^n の中心化群は $\mathit{\Gamma}_\infty$ である故，

$$\mathcal{C}^{(1)} = \bigcup_{\gamma \in \mathit{\Gamma}_\infty \backslash \mathit{\Gamma}} \left\{\gamma^{-1}\tau^n\gamma : \mathbb{Z} \ni n \neq 0\right\} \tag{23.11}$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned} R^{(p)}(z,z) &= \sum_{\gamma \in \mathit{\Gamma}_\infty \backslash \mathit{\Gamma}} \sum_{n \neq 0} r(\gamma(z), n + \gamma(z)) \\ &= 2 \sum_{\gamma \in \mathit{\Gamma}_\infty \backslash \mathit{\Gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} p(n^2/(2\mathrm{Im}\,\gamma(z))^2). \end{aligned} \tag{23.12}$$

ここで，函数 p を p_η で置き換えたものを $R_\eta^{(1)}$ とすれば $R^{(1)} = R_\alpha^{(1)} - R_\beta^{(1)}$ であり，また (19.4) から

$$R_\alpha^{(1)}(z,z) = \frac{2^{2(\alpha-1)}}{\pi^2 i} \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{2^{2\xi}\Gamma(\xi+\alpha)^2\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha)} \zeta(2(\xi+\alpha))E(z, 2(\xi+\alpha))d\xi.$$

両辺を $\mathcal{F}_Y$ 上で積分するが，右辺では明らかに積分の順序を交換できる．等式 (17.17)，Green 公式及び (17.14) を用いて，

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_Y} R_\alpha^{(1)}(z,z)d\mu(z) &= \frac{2^{2\alpha-3}}{\pi^2 i} \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{2^{2\xi}\Gamma(\xi+\alpha)^2\Gamma(-\xi)\zeta(2(\xi+\alpha))}{\Gamma(\xi+2\alpha)(\xi+\alpha)(2(\xi+\alpha)-1)} \\ &\qquad \times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{y=Y} E(x+iy, 2(\xi+\alpha))dxd\xi \\ &= \frac{2^{2(\alpha-1)}}{\pi^2 i} \int_{(-\frac{1}{4})} \frac{2^{2\xi}\Gamma(\xi+\alpha)^2\Gamma(-\xi)\zeta(2(\xi+\alpha))}{\Gamma(\xi+2\alpha)} \end{aligned}$$

$$\times\left(\frac{Y^{2(\xi+\alpha)-1}}{2(\xi+\alpha)-1}-\frac{Y^{-2(\xi+\alpha)}}{2(\xi+\alpha)}\varphi_\Gamma(2(\xi+\alpha))\right)d\xi.$$

積分路を例えば $\mathrm{Re}\,\xi=\frac{1}{4}-\alpha$ に移動し，(1.13) に注意して留数計算を行い，その結果を $(\Gamma'/\Gamma)(\frac{1}{2})=-c_E-2\log 2$ を用いて整理すれば，

$$\int_{\mathcal{F}_Y} R_\alpha^{(1)}(z,z)d\mu(z)$$
$$=\frac{1}{2\alpha-1}\left\{\log(Y/2)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\alpha+\tfrac{1}{2})\right\}+\frac{1}{(2\alpha-1)^2}+O(Y^{-\frac{1}{2}}) \qquad (23.13)$$

を得る．

一方，函数 $C(z,z)$ の寄与は

$$\int_{\mathcal{F}_Y} C(z,z)d\mu(z)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\int_{\mathcal{F}_Y}|E(z,\tfrac{1}{2}+it)|^2d\mu(z)dt+k(\tfrac{1}{2}i)+O(Y^{-1})$$

であるが，右辺の積分は (22.22) を用いて

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\left(2\log Y-\frac{\varphi'_\Gamma}{\varphi_\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it)-\int_{\mathcal{F}_Y}|\tilde{E}(z,\tfrac{1}{2}+it)|^2d\mu(z)\right)dt$$
$$+\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(Y^{2it}\varphi_\Gamma(\tfrac{1}{2}-it)-1)k(t)\frac{dt}{t}$$

に等しい．この最後の積分は積分路を例えば $\mathrm{Im}\,t=\frac{1}{2}$ に移動して，容易に $\frac{1}{4}k(0)+O(Y^{-1})$ であることが解る．従って，(4.13) 及び (21.17) $(\nu=0)$ を参照して

$$\int_{\mathcal{F}_Y} C(z,z)d\mu(z)=\left(\frac{1}{2\alpha-1}-\frac{1}{2\beta-1}\right)\log Y \qquad (23.14)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\frac{\varphi'_\Gamma}{\varphi_\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it)dt+k(\tfrac{1}{2}i)+\tfrac{1}{4}k(0)+O(Y^{-\frac{1}{2}}) \qquad (23.15)$$

を得る．

漸近式 (23.13)–(23.14) をまとめて

$$\lim_{Y\to\infty}\int_{\mathcal{F}_Y}[R^{(1)}-C](z,z)d\mu(z)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\frac{\varphi'_\Gamma}{\varphi_\Gamma}(\tfrac{1}{2}+it)dt - k(\tfrac{1}{2}i)$$

$$-\frac{1}{2\alpha-1}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\alpha+\tfrac{1}{2})+\log 2\right)+\frac{1}{2\beta-1}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\beta+\tfrac{1}{2})+\log 2\right). \tag{23.16}$$

[附記]　Mercer の定理については，[15, p. 245] を見よ．

—24—
閉測地線

計算を続け，双曲元と楕円元の寄与を定める．

このために集合 $\mathcal{C}^{(2)}$ の構造を調べよう．先ず，ある双曲元の固定点の組が Γ の元により他の双曲元の固定点の組に写像される関係にある場合，これらの双曲元は同じ同値類に入るとして $\mathcal{C}^{(2)}$ を細分する．代表元のひと組を $\{\omega\}$，対応する同値類の族を $\{\mathcal{C}_\omega^{(2)}\}$ とする．元 ω の固定点を x_0，x_1 とし，$\rho(x_0)=0$，$\rho(x_1)=$ 尖点なる $\rho\in\mathbb{T}(\mathcal{H})$ をとると，$\rho\omega\rho^{-1}(z)=c(\omega)z$ となる $c(\omega)>0\,(\neq 1)$ があるが，

$$N(\omega)=\max(c(\omega),c(\omega^{-1}))>1$$

を ω のノルムという．これは定義 (17.3) を参照して

$$N(\omega)=\exp\left(\inf_{z\in\mathcal{H}} d(z,\omega(z))\right)$$

とも定義できる故，曲面 $\mathcal{F}$ 上の「閉測地線」に付随した量である．勿論，ノルムはその双曲元が入る $\mathbb{T}(\mathcal{H})$-共役類のみで定まる．また，この ω の変形から解る様に集合 $\mathcal{C}_\omega^{(2)}$ の元で ω と同じ固定点をもつもの全体は Γ の巡回部分群となるが，それを $[\omega_0]$ とする．つまり，

$$\mathcal{C}_\omega^{(2)}=\bigcup_{\gamma\in B(\omega_0)\backslash\Gamma}\gamma^{-1}\Big\{[\omega_0]\backslash\{1\}\Big\}\gamma.$$

但し，$B(\omega_0)$ は $[\omega_0]$ の $\varGamma$-中心化群である．ここで，一般的には二つの場合が存り得る．一つは ω_0 と ω_0^{-1} が $\varGamma$-共役の場合であり，他はそうではない場合である．前者では，$[B(\omega_0):[\omega_0]]=2$ であり，

$$\mathcal{C}_\omega^{(2)} = \bigcup_{\gamma\in[\omega_0]\backslash\varGamma} \{\gamma^{-1}\omega_0^n\gamma : \mathbb{Z}\ni n>0\}.$$

後者では，$B(\omega_0)=[\omega_0]$ であり，

$$\mathcal{C}_\omega^{(2)} = \bigcup_{\gamma\in[\omega_0]\backslash\varGamma} \{\gamma^{-1}\omega_0^n\gamma : \mathbb{Z}\ni n\neq 0\}.$$

例えば，$\omega : z\mapsto(2z+1)/(z+1)$ とすると，$B(\omega_0)$ は反転 $z\mapsto -1/z$ を含み，前者の場合となる．そこで，両者をまとめるために，これら全ての巡回群 $[\omega_0]$ の生成元を $\varGamma$-共役によって分類し，代表元のひと組を $\{\varpi\}$ にて表示する．この定義のもとに，始めに導入した細分は

$$\mathcal{C}^{(2)} = \bigcup_{\varpi}\bigcup_{\gamma\in[\varpi]\backslash\varGamma} \{\gamma^{-1}\varpi^n\gamma : \mathbb{Z}\ni n>0\} \tag{24.1}$$

と書ける．なお，これら ϖ の属する $\varGamma$-共役類を「素類」，$N(\varpi)$ を $\varGamma$ から生成される「概素数」という．場合によっては，ϖ，ϖ^{-1} が相異なる素類を代表する訳である．曲面 $\mathcal{F}$ 上の閉測地線と素類との対応を考察すれば興味深かろう．

この様にして，

$$R^{(2)}(z,z) = \sum_{\varpi}\sum_{\gamma\in[\varpi]\backslash\varGamma}\sum_{n=1}^{\infty} r(\gamma(z),\varpi^n\gamma(z))$$

と分解されるが，右辺は当然に絶対収束している．よって，

$$\int_{\mathcal{F}} R^{(2)}(z,z)d\mu(z) = \sum_{\varpi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[[\varpi]]} r(z,\varpi^n z)d\mu(z). \tag{24.2}$$

但し，$[[\varpi]]$ は群 $[\varpi]$ の基本領域である．上記の $\rho\in\mathbb{T}(\mathcal{H})$ を用いて，

$$\int_{[[\varpi]]} r(z,\varpi^n(z))d\mu(z) = \int_{\rho([[\varpi]])} r(\rho^{-1}(z),\varpi^n\rho^{-1}(z))d\mu(z)$$

$$= \int_{[[\rho\varpi\rho^{-1}]]} r(z, \rho\varpi^n\rho^{-1}(z))d\mu(z)$$
$$= \int_1^{N(\varpi)} \int_{-\infty}^{\infty} r(z, N(\varpi)^n z)y^{-2}dxdy.$$

そこで，$a, b > 1$ について，積分

$$\int_1^a \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(\varrho(z, bz))y^{-2}dxdy$$
$$= \int_1^a \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha\left((\tfrac{1}{2}(\sqrt{b} - 1/\sqrt{b}))^2(1 + (x/y)^2)\right) y^{-2}dxdy$$

の計算を行う．定義 (19.4) に戻り右辺は

$$\frac{1}{8\pi^2 i}\int_{(-\frac{1}{4})} \frac{\Gamma^2(\xi+\alpha)\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha)}\left((\tfrac{1}{2}(\sqrt{b} - 1/\sqrt{b})\right)^{-2(\xi+\alpha)}$$
$$\times \int_1^a y^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} (1 + (x/y)^2)^{-\xi-\alpha}dxdyd\xi$$
$$= \frac{\log a}{8\pi^{\frac{3}{2}} i}\int_{(-\frac{1}{4})} \frac{\Gamma(\xi+\alpha)\Gamma(\xi+\alpha-\frac{1}{2})\Gamma(-\xi)}{\Gamma(\xi+2\alpha)}\left(\tfrac{1}{2}(\sqrt{b} - 1/\sqrt{b})\right)^{-2(\xi+\alpha)} d\xi$$

となる． 等式 (20.18) の証明を参照し，

$$\int_1^a \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(\varrho(z, bz))y^{-2}dxdy = \frac{b^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(2\alpha-1)(\sqrt{b} - 1/\sqrt{b})}\log a \tag{24.3}$$

を得る．これらをまとめ，(24.2) から

$$\int_{\mathfrak{F}} R^{(2)}(z, z)d\mu(z) = \frac{1}{2\alpha-1}\sum_{\varpi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log N(\varpi)}{N(\varpi)^{\alpha+n}-1}$$
$$- \frac{1}{2\beta-1}\sum_{\varpi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log N(\varpi)}{N(\varpi)^{\beta+n}-1}. \tag{24.4}$$

次に，楕円元の寄与を求めよう．基本領域の意味からして，楕円元の固定点はいずれかの $\gamma \in \Gamma$ について $\gamma(\mathfrak{F})$ の境界上になければならない．つまり，それらは $\partial\mathfrak{F}$ 上の固定点 $e(\frac{1}{4})$，$e(\frac{1}{6})$ のどちらかの γ による像である．一方，点 $e(\frac{1}{4})$，$e(\frac{1}{6})$ を固定する Γ の部分群は各々 $[\omega_4]$，$[\omega_6]$ ($\omega_4 : z \mapsto -1/z$，$\omega_6 : z \mapsto -1/(z+1)$) で

ある．更に，これら巡回群の Γ-中心化群は各々それら自身である．従って，(24.2) と全く同様にして，

$$\int_{\mathcal{F}} R^{(e)}(z,z)d\mu(z) = \int_{[[\omega_4]]} r(z,\omega_4(z))d\mu(z)$$
$$+ \sum_{j=1,2} \int_{[[\omega_6]]} r(z,\omega_6^j(z))d\mu(z). \qquad (24.5)$$

そこで，$\mathbb{T}(\mathcal{H})$ の楕円元 ω をとり $[\omega]$ は有限位数 m をもつものとし，

$$T_\alpha(\omega^j) = \int_{[[\omega]]} r_\alpha(z,\omega^j(z))d\mu(z) \qquad (1 \le j \le m-1)$$

を計算する．式 (24.5) は

$$\int_{\mathcal{F}} R^{(e)}(z,z) = T_\alpha(\omega_4) - T_\beta(\omega_4) + \sum_{j=1,2} (T_\alpha(\omega_6^j) - T_\beta(\omega_6^j)) \qquad (24.6)$$

と書ける．

任意の整数 ν について，積分領域を $\omega^\nu[[\omega]]$ に代えても積分 $T_\alpha(\omega^j)$ の値は変わらぬ故，$\nu = 0,1,\cdots,m-1$ としてそれらを加え，

$$T_\alpha(\omega^j) = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{H}} r_\alpha(z,\omega^j(z))d\mu(z).$$

勿論，この等式においては，ω の固定点は i であるとしてよい．即ち，より具体的に

$$\omega^j : z \mapsto \frac{\eta z - \lambda}{\lambda z + \eta} \quad (\eta = \cos((j/m)\pi),\ \lambda = \sin((j/m)\pi))$$

としてよい．よって，

$$T_\alpha(\omega^j) = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} p_\alpha\left(\tfrac{1}{4}\lambda^2 y^{-2}|z^2+1|^2\right) y^{-2}dydx.$$

内部積分は変数変換 $y = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}u$ により，

$$(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} p_\alpha(\tfrac{1}{4}\lambda^2((x^2+1)(u-1/u)^2+4x^2))u^{-2}du$$
$$= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\int_1^{\infty} p_\alpha(\tfrac{1}{4}\lambda^2((x^2+1)(u-1/u)^2+4x^2))\frac{d}{du}(u-1/u)du$$

$$= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty p_\alpha(\tfrac{1}{4}\lambda^2((x^2+1)v^2+4x^2))dv.$$

定義 (19.4) に戻り，以前と同じ議論によりこの積分の値は

$$\frac{1}{2(2\alpha-1)\lambda\sqrt{x^2+1}}\left(\lambda|x|+\sqrt{(\lambda x)^2+1}\right)^{1-2\alpha}.$$

従って，

$$\begin{aligned} T_\alpha(\omega^j) &= \frac{1}{(2\alpha-1)\lambda m}\int_0^\infty \frac{\left(\lambda x+\sqrt{(\lambda x)^2+1}\right)^{1-2\alpha}}{x^2+1}dx \\ &= \frac{2}{(2\alpha-1)m}\int_0^\infty \frac{(\max(\xi,1/\xi))^{1-2\alpha}}{(\xi-1/\xi)^2+4\lambda^2}d\xi. \end{aligned}$$

但し，変数変換 $2\lambda x = \xi - 1/\xi$ を用いた．ここで，

$$\frac{1}{2\alpha-1}(\max(\xi,1/\xi))^{1-2\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi^{2it}}{(\alpha-\frac{1}{2})^2+t^2}dt \tag{24.7}$$

に注意して，

$$\begin{aligned} T_\alpha(\omega^j) &= \frac{1}{\pi m}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(\alpha-\frac{1}{2})^2+t^2}\int_0^\infty \frac{\xi^{2it}}{(\xi-1/\xi)^2+4\lambda^2}d\xi dt \\ &= \frac{1}{\pi m}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{((\alpha-\frac{1}{2})^2+t^2)(1+e^{-2\pi t})}\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi^{2it}}{(\xi-1/\xi)^2+4\lambda^2}d\xi dt. \end{aligned}$$

但し，$\arg\xi = 0$ $(\xi > 0)$，$\arg\xi = \pi$ $(\xi < 0)$ である．この最後の積分は積分路を $\mathrm{Im}\,\xi = +\infty$ に移動して，$\xi = e(j/(2m))$，$-e(-j/(2m))$ における留数を求めることにより計算できる．こうして，

$$T_\alpha(\omega^j) = \frac{1}{2m\lambda}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2(j/m)\pi t}}{((\alpha-\frac{1}{2})^2+t^2)(1+e^{-2\pi t})}dt \tag{24.8}$$

を得るが，この積分もやはり積分路を $\mathrm{Im}\,t = +\infty$ に移動して計算できる．臨時に，α は整数ではないと仮定して

$$T_\alpha(\omega) = \frac{\pi}{(2\alpha-1)m\lambda}\frac{e^{(1-2\alpha)(j/m)\pi i}}{1-e^{-2\alpha\pi i}}$$

$$+\frac{i}{2(2\alpha-1)m\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}e^{-(2l+1)(j/m)\pi i}\left(\frac{1}{\alpha+l}-\frac{1}{1-\alpha+l}\right).$$

この無限和は (2.2) を用いて,

$$\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}e^{-(2l+1)(j/m)\pi i}\sum_{f=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(\alpha+l)/m+f}-\frac{1}{(1-\alpha+l)/m+f}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}e^{-(2l+1)(j/m)\pi i}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}((\alpha+l)/m)-\frac{\Gamma'}{\Gamma}((1-\alpha+l)/m)\right)$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\left(e^{(2l+1)(j/m)\pi i}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-(\alpha+l)/m)-e^{-(2l+1)\pi i/m}\frac{\Gamma'}{\Gamma}((\alpha+l)/m)\right)$$

$$=\frac{2i}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\left(\sin((2l+1)(j/m)\pi)\frac{\Gamma'}{\Gamma}((\alpha+l)/m)+\pi\frac{e^{(2l+1)(j/m)\pi i}}{\tan(\pi(\alpha+l)/m)}\right).$$

ここで, 等式

$$\frac{e^{(1-2\alpha)(j/m)\pi i}}{1-e^{-2\alpha\pi i}}=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{e^{(2l+1)(j/m)\pi i}}{\tan(\pi(\alpha+l)/m)}$$

に注意する. 両辺の極の状態を調べればよい. 従って,

$$T_\alpha(\omega^j)=\frac{1}{(1-2\alpha)m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{\sin((2l+1)(j/m)\pi)}{\sin((j/m)\pi)}\frac{\Gamma'}{\Gamma}((\alpha+l)/m).$$

勿論, 上記の仮定 $\alpha\notin\mathbb{Z}$ を外すことができる. また, これより

$$\sum_{j=1}^{m-1}T_\alpha(\omega^j)=\frac{1}{(1-2\alpha)m^2}\sum_{l=0}^{m-1}(m-2l-1)\frac{\Gamma'}{\Gamma}((\alpha+l)/m). \tag{24.9}$$

が導かれる. 実際,

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\sin((2l+1)j\pi/m)}{\sin((j/m)\pi)}=\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{h=-l}^{l}e((j/m)h)=m-2l-1.$$

以上, 計算結果 (23.7), (23.9), (23.10), (23.15), (24.4), (24.6), (24.9) をまとめ, モジュラー群に対する「解核跡公式」を得る.

【定理 24.1】 記号は上記の通りとして，任意の $\alpha,\beta>1$ について

$$\sum_{j=0}^{\infty}k_{\alpha,\beta}(\kappa_j)-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_{\alpha,\beta}(t)\frac{\varphi'_\Gamma}{\varphi_\Gamma}(\tfrac12+it)dt=\Psi_\Gamma(\alpha)-\Psi_\Gamma(\beta). \quad (24.10)$$

但し，

$$\begin{aligned}\Psi_\Gamma(\alpha)=&-\frac16\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\alpha)-\frac{1}{2\alpha-1}\Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\alpha+\tfrac12)+\log 2\Big)\\&+\frac{1}{4(2\alpha-1)}\Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac12(\alpha+1))-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac12\alpha)\Big)\\&+\frac{2}{9(2\alpha-1)}\Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac13(\alpha+2))-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac13\alpha)\Big)\\&+\frac{1}{2\alpha-1}\sum_{\varpi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log N(\varpi)}{N(\varpi)^{\alpha+n}-1}.\end{aligned} \quad (24.11)$$

[附記] 上記の計算方針は著者によるが，勿論 $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ の離散群一般にそのまま適用できる．つまり，Eisenstein 級数に関する一部を除外すれば，Γ がモジュラー群であるという特殊性は何ら用いられていない．群 Γ の算術的な特性は Selberg 跡公式よりも後に示す「Kuznetsov 跡公式」に強く反映されている．

—25—
Selberg ゼータ函数

跡公式 (24.10) は魅惑的である．

リーマンゼータ函数についての基本等式 (3.5) に戻り，多少の再整理を行えば

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\frac{1-2s}{s(s-1)}-\frac12\Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac12 s)-\log\pi\Big)$$

$$+ (s - \tfrac{1}{2}) \sum_{\rho} \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 - (\rho - \frac{1}{2})^2}.$$

従って,

$$\sum_{\rho} k_{\alpha,\beta}(i(\tfrac{1}{2} - \rho)) - 2k_{\alpha,\beta}(\tfrac{1}{2}i) = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta). \tag{25.1}$$

但し, $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$ のとき

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\alpha - 1}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}\alpha) - \log\pi\right) - \frac{2}{2\alpha - 1}\sum_{p}\frac{\log p}{p^{\alpha} - 1}. \tag{25.2}$$

等式 (24.10)–(24.11) とこれらとの類似は尋常ではない. Selberg はこの事実を観察し (195?) , 極く自然に函数

$$\zeta_{\Gamma}(s) = \prod_{\varpi}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{N(\varpi)^{s+n}}\right) \tag{25.3}$$

に導かれた. これを群 Γ に付随した「Selberg ゼータ函数」という. 形式上の対応

$$\begin{array}{ccc} \zeta(s) & \longleftrightarrow & \zeta_{\Gamma}(s) \\ \rho & \longleftrightarrow & \frac{1}{2} + i\kappa_j \end{array} \tag{25.4}$$

は明らかであり, $\zeta_{\Gamma}(s)$ については「Riemann 予想の成立」を直観的に見てとれるであろう. 更に, 函数等式 $\zeta_{\Gamma}(1-s) = \chi_{\Gamma}(s)\zeta_{\Gamma}(s)$ の存在も対称性 $k_{\alpha,\beta} = k_{1-\alpha,\beta}$ からほぼ明白である.

では, 等式 (3.5) は「跡公式」であろうか. 読者諸氏への設問である. 類似と共に幾つかの大きな相違点も存在することに留意されたい.「Euler 積」(25.3) を展開して得られる Dirichlet 級数は何を表現しているのか. そこにおける Poisson 和公式の類似物は何か. 点 $s = 1$ の近傍での $\zeta_{\Gamma}(s)$ の状態は「ゼロスペクトル項」$k_{s,\beta}(\frac{1}{2}i)$ から読みとれ, $\zeta_{\Gamma}(s)$ は $s = 1$ にて単根をもつが, これは $\zeta(s)$ とは全く異なる. とまれ, 定義 (25.3) から出発して, スペクトル理論を経ずに (24.10) に達することが Riemann 予想の成立をも含めて成されたならば, その論理は恐らく $\zeta(s)$ にも適用できるであろう.

[附記]　等式 (24.10) から

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_{\alpha,2\alpha}(\kappa_j) = \tfrac{1}{6}\log 2 + o(1) \qquad (\alpha \to +\infty).$$

これにより容易に

$$K^2 \ll \sum_{\kappa_j \le K} 1 \ll K^2. \tag{25.5}$$

次に,「偶」函数 $f(r)$ が条件

$$\text{領域 } \{|\mathrm{Im}\, r| < \tfrac{1}{2} + \varepsilon\} \text{ で正則，且つ } f(r) = O(|r|^{-2-\varepsilon}) \quad (|r| \ge 1) \tag{25.6}$$

を満たすとき,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{ixr} dr \qquad (x \in \mathbb{R})$$

として

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} f(\kappa_j) &= \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh(\pi r) f(r) dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+ir) f(r) dr \\ &\quad - \frac{\log 2}{2\pi}\hat{f}(0) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\frac{\varphi'_\Gamma}{\varphi_\Gamma}(\tfrac{1}{2}+ir)dr \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi r}}{1+e^{-2\pi r}} f(r) dr + \frac{1}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{3}\pi r} + e^{-\frac{4}{3}\pi r}}{1+e^{-2\pi r}} f(r) dr \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\sum_{\varpi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log N(\varpi)}{N(\varpi)^{\frac{1}{2}n} - N(\varpi)^{-\frac{1}{2}n}}\hat{f}(n\log N(\varpi)).\end{aligned} \tag{25.7}$$

一般にこれを群 Γ に対する Selberg 跡公式という．証明は容易である．当然に (24.10) は $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$ についても成立している故，両辺に $(2\alpha-1)f((\alpha-\frac{1}{2})i)$ を乗じて垂直線 $\mathrm{Re}\,\alpha = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ に沿って積分すると，(25.5)–(25.6) により左辺では項別積分が許される．そこで

$$\int_{(1+\frac{1}{2}\varepsilon)} \frac{(2\alpha-1)f((\alpha-\frac{1}{2})i)}{(\alpha-\frac{1}{2})^2 + r^2} d\alpha = 2\pi i f(r) \tag{25.8}$$

であることに注意すればよい．右辺については，(24.3)，(24.8) に戻り，(25.8) を再び用いればよい．定義式 (24.11) の右辺の第 1 項から (25.7) の右辺の第 1 項が

得られるが，$f(r)$ が偶函数であることと函数等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/(\sin\pi s)$ とが用いられている．なお，(24.10)–(24.11) に第 3，4 節の議論を適用し,「測地線素数定理」

$$\sum_{\substack{\varpi \\ N(\varpi)\le x}} 1 = \mathrm{li}\, x + O(x^{\frac{3}{4}})$$

を得たり，(25.7) を特殊化して評価 (25.5) を詳細な漸近式に置き換える議論もあるが，著者は感動を覚えない．これらについては [3] を見よ．

—26—

Kloosterman 和と Linnik

上記で示唆した議論展開の不可逆性は至極当然のことである．複素零点の定義は $\zeta(s)$ の定義を元にしており，(3.5) の右辺のみから (1.2) へ戻ることは様々な仮定なくしては不可能である．函数 $\zeta_\Gamma(s)$ の場合はその逆である．従って，函数 $\zeta(s)$ と $\zeta_\Gamma(s)$ の外見上の類似を議論することは，恐らくあまり意味のあることではなかろう．言うまでもなく，事象 $\zeta(\rho)=0$ を何らかの構造の中で再発見せねばこの手詰まりは解消しない．

以下に展開することはこの未知の構造と何らかの関連を有するやと思われる現象である．第 16 節の着想に戻り，函数 $\zeta(s)$ と作用素 Δ とを直接に関連付けることを試みる．議論の出発点は定義 (1.1)–(1.2) であり，終点は Maass 波動の数論的意義である．結果として現われる構造は，$\zeta(s)$ の個々の値と Δ の離散固有値との緊密な関連を跡公式の形式にて表示する．ここに注目すべきは，上記のごとき不可逆性は現われず，議論の両端点を定理 18.1 を介して往復可能である．

この目的のために，以下第 30 節までを「Kuznetsov 和公式」(1977) に関する議論に当てる．これは「Kloosterman 和」の和

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l)\varphi\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{|mn|}\Big) \tag{26.1}$$

における変数 m, n の分離をスペクトル理論にて成すものであるが，(16.5) を $\zeta(s)$ の 4 乗平均の場合について具体化するに当たって必要な手段である．後に見る様に，この様な和が (13.1) にて定義された $\mathcal{Z}_2(g)$ に簡単な変形を施すと現われるのである．勿論，定理 18.1 の直接な応用にて議論することもできるが，Kuznetsov 和公式を用いることにより，数論的な機構の見事な調和をより深く体験できる．

Kuznetsov 理論の端緒は Linnik (1962) の「Kloosterman 和の干渉」予想であり，基本的な手段は Selberg (1965) による Poincaré 級数 $P_m(z,s)$ のスペクトル解析である．数論の多くの問題に (26.1) の形の和が現われるが，代数的な評価 (17.11) の応用は大概の場合に皮相的な結果しかもたらさない．そこで，Linnik は $S(m,n;l)$ の偏角の変動を観察し，Kloostermann 和の間に打ち消し合いの有るべきことに想到した．つまり，任意の固定された整数 $m, n \neq 0$ について

$$\sum_{l \le L} S(m,n;l) \ll L^{\frac{3}{2}-\vartheta} \tag{26.2}$$

となる絶対常数 $\vartheta > 0$ の存在を予言したのである．統計的ながらこれは (17.11) を超える評価である．Selberg は Linnik の予想を解析するために Poincaré 級数を導入し，表示 (17.9) をもとに函数

$$Z_{m,n}(s) = (2\pi\sqrt{mn})^{2s-1} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s} S(m,n;l) \qquad (m,n>0) \tag{26.3}$$

の解析的性質を考察した．具体的には，彼は内積

$$\langle P_m(\cdot,s_1), P_n(\cdot,\overline{s_2})\rangle = \int_{\mathcal{F}} P_m(z,s_1)\overline{P_n(z,\overline{s_2})}\,d\mu(z) \tag{26.4}$$

を二通りの方法で計算し，得られた等式から (26.3) の解析接続，極の決定を行った．等式の一方にはスペクトル分解があり，他方には定義 (17.7) にもとずく幾何学的な計算がある．これは，跡公式 (24.10) の証明と明らかに同一の着想であるが，函数 $P_m(z,s)$ は群 $\varGamma$ の数論的特性を検出するによりふさわしい手段なのである．Kuznetsov は Selberg の議論を完成に導き，その一応用として Linnik 予想 (26.2) に $\vartheta \ge \frac{1}{3}$ なる解答を与えた．

以下，Kuznetsov 理論を簡略化して論述する．先ず，(26.4) の幾何学的な計算から始める．

【補題 26.1】 条件

$$\operatorname{Re} s_2 + \alpha > \operatorname{Re} s_1 > \alpha + \tfrac{3}{4} \quad (\alpha > 0) \tag{26.5}$$

のもとに，任意の整数 $m, n \geq 1$ について

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s_1),\ P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle &= \delta_{m,n}\Gamma(s_1+s_2-1)(4\pi m)^{1-s_1-s_2}\\ &+ 2^{2(1-s_2)}\pi^{s_1-s_2+1}n^{s_1-s_2}\Gamma(s_1+s_2-1)\\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s_1} S(m,n\,;l) W\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\,; s_1, s_2\Big).\end{aligned} \tag{26.6}$$

但し，

$$W(x\,; s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\eta+s_2-s_1)}{\Gamma(\eta+s_2)\Gamma(s_1-\eta)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2\eta} d\eta. \tag{26.7}$$

証明　補題 17.1 により，$P_m(z,s)$ は仮定 $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$，$m \geq 1$ のもとに，s について正則であり，且つ $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ の元である．また，任意の $f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 及び $\operatorname{Re} s > 1$，$m \geq 1$ について

$$\begin{aligned}\langle f, P_m(\cdot, \overline{s})\rangle &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\mathcal{F}} f(z)(\operatorname{Im}\gamma(z))^s e(-m\gamma(\overline{z}))d\mu(z)\\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{\gamma(\mathcal{F})} f(z)(\operatorname{Im} z)^s e(-m\overline{z})d\mu(z)\\ &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z)e(-m\overline{z})y^{s-2}dxdy.\end{aligned} \tag{26.8}$$

ここで必要な絶対収束性は (17.8) にて確かめられている．特に，$\operatorname{Re} s_1 > \frac{3}{4}$，$\operatorname{Re} s_2 > 1$ として

$$\langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle = \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_m(z, s_1)e(-n\overline{z})y^{s_2-2}dxdy.$$

よって，展開 (17.9) を用いれば，条件 $\operatorname{Re} s_j > 1$ $(j = 1, 2)$ のもとに

$$\langle\ P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle$$

$$= \delta_{m,n}\Gamma(s_1+s_2-1)(4\pi m)^{1-s_1-s_2} + \int_0^\infty y^{s_2-s_1-1}\sum_{l=1}^\infty l^{-2s_1}S(m,n;l)$$
$$\times \int_{-\infty}^\infty \exp\Big(-2\pi ny(1+i\xi) - \frac{2\pi m}{l^2y(1-i\xi)}\Big)\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{s_1}}dy. \tag{26.9}$$

臨時に

$$\sigma_2 > \sigma_1 > 1 \qquad (\mathrm{Re}\, s_j = \sigma_j) \tag{26.10}$$

と仮定すれば，右辺は絶対収束する故，

$$\langle P_m(\cdot,s_1),\, P_n(\cdot,\overline{s_2})\rangle = \delta_{m,n}\Gamma(s_1+s_2-1)(4\pi m)^{1-s_1-s_2}$$
$$+\sum_{l=1}^\infty l^{-2s_1}S(m,n;l)\int_{-\infty}^\infty (1+\xi^2)^{-s_1}Y_{s_2-s_1}(\xi;m,n,l)d\xi. \tag{26.11}$$

但し，

$$Y_\omega(\xi;m,n,l) = \int_0^\infty y^{\omega-1}\exp\Big(-2\pi ny(1+i\xi) - \frac{2\pi m}{l^2y(1-i\xi)}\Big)dy.$$

この積分は勿論 Bessel 函数 K_ω で表示することもできるが，ここでは指数函数についての Mellin 逆変換を用いて

$$Y_\omega(\xi;m,n,l) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty y^{\omega-1}\exp(-2\pi ny(1+i\xi))$$
$$\times\int_{(\alpha)}\Gamma(\eta)\Big(\frac{2\pi m}{l^2y(1-i\xi)}\Big)^{-\eta}d\eta dy$$

と変形する．但し，$\alpha>0$ は任意であり，また $|\arg(1-i\xi)|<\frac{1}{2}\pi$ である．条件 $\mathrm{Re}\,\omega > -\alpha$ のもとに積分の順序を交換でき，

$$Y_\omega(\xi;m,n,l) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi n)^{-\omega}\int_{(\alpha)}\Gamma(\eta)\Gamma(\eta+\omega)\Big(\frac{2\pi}{l}\sqrt{mn}\Big)^{-2\eta}\frac{(1-i\xi)^\eta}{(1+i\xi)^{\eta+\omega}}d\eta.$$

但し，$|\arg(1+i\xi)|<\frac{1}{2}\pi$ である．従って，

$$\alpha+\sigma_2-\sigma_1>0 \tag{26.12}$$

なるとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^{-s_1}Y_{s_2-s_1}(\xi\,;m,n,l)d\xi = \frac{1}{2\pi i}(2\pi n)^{s_1-s_2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(\alpha)}\Gamma(\eta)\Gamma(\eta+s_2-s_1)\Big(\frac{2\pi}{l}\sqrt{mn}\Big)^{-2\eta}\frac{(1-i\xi)^{\eta-s_1}}{(1+i\xi)^{\eta+s_2}}d\eta d\xi.$$

右辺は

$$\alpha-\sigma_1+\tfrac{1}{2}<0 \tag{26.13}$$

のとき絶対収束している．Stirling 公式を (10.14) の形で用いて，被積分函数を評価すればよい．そこで，(26.13) を仮定して，積分の順序交換を行うが，内部積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-i\xi)^{\eta-s_1}}{(1+i\xi)^{\eta+s_2}}d\xi = 2^{2-s_1-s_2}\pi\frac{\Gamma(s_1+s_2-1)}{\Gamma(\eta+s_2)\Gamma(s_1-\eta)}.$$

これらをまとめて，(26.5)–(26.7) を得る．つまり，条件 (26.5) のもとに (26.12)–(26.13) は満たされ，(26.10) は無視できる．

次に，Parseval 等式を用いて，スペクトル分解を得る．補題 26.1 と組み合わせて，一種の跡公式を得るが，それは解核跡公式に対応するものと見なされる．

【補題 26.2】 Maass–Fourier 係数 $\rho_j(n)$ は (18.18) にて定義されているものとする．条件

$$m,n\geq 1,\quad \mathrm{Re}\,s_j>\tfrac{3}{4}\quad (j=1,2) \tag{26.14}$$

のもとに，

$$\langle P_m(\cdot,s_1),\,P_n(\cdot,\overline{s_2})\rangle = \frac{\pi}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}(4\pi\sqrt{mn})^{1-s_1-s_2}(n/m)^{\frac{1}{2}(s_1-s_2)}$$

$$\times\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)\Theta(s_1,s_2\,;\kappa_j)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)\cosh(\pi r)\Theta(s_1,s_2\,;r)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}dr\Big\}. \tag{26.15}$$

但し，

$$\Theta(s_1, s_2; r) = \Gamma(s_1 - \tfrac{1}{2} + ir)\Gamma(s_1 - \tfrac{1}{2} - ir)\Gamma(s_2 - \tfrac{1}{2} + ir)\Gamma(s_2 - \tfrac{1}{2} - ir). \tag{26.16}$$

証明　仮定 (26.14) のもとに $P_m(z, s_1)$，$P_n(z, s_2)$ は共に $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ の元であるから，(18.17) により

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} \langle P_m(\cdot, s_1), \psi_j\rangle \overline{\langle P_n(\cdot, \overline{s_2}), \psi_j\rangle} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(r, P_m(\cdot, s_1))\overline{\mathcal{E}(r, P_n(\cdot, \overline{s_2}))}\, dr. \end{aligned} \tag{26.17}$$

条件 $\mathrm{Re}\, s > 1$ のもとに (26.8) により

$$\langle P_m(\cdot, s), \psi_j\rangle = \int_0^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{\psi_j(z)} y^{s-2} e(mz)\, dx dy \quad \big(j \geq 0\big).$$

これより直ちに

$$\langle P_m(\cdot, s), \psi_0\rangle = 0. \tag{26.18}$$

また，$j \geq 1$ であるならば

$$\begin{aligned}&\langle P_m(\cdot, s), \psi_j\rangle \\ &= (2\pi m)^{\frac{1}{2}-s}\, \overline{\rho_j(m)} \int_0^{\infty} y^{s-\frac{3}{2}} e^{-y} K_{i\kappa_j}(y)\, dy \\ &= \sqrt{\pi}(4\pi m)^{\frac{1}{2}-s}\, \overline{\rho_j(m)}\, \Gamma(s - \tfrac{1}{2} + i\kappa_j)\Gamma(s - \tfrac{1}{2} - i\kappa_j)/\Gamma(s).\end{aligned} \tag{26.19}$$

同様に，(17.14) を用いて，$\mathrm{Re}\, s > 1$, $r \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(r, P_m(\cdot, s)) \\ &= 2^{2-2s}\pi(m\pi)^{\frac{1}{2}-s-ir}\sigma_{2ir}(m)\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2} + ir)\Gamma(s - \frac{1}{2} - ir)}{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2} - ir)\zeta(1 - 2ir)}.\end{aligned} \tag{26.20}$$

条件 $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{4}$ のもとに (26.18)–(26.20) の各辺は s の正則函数であることに注意した上で (26.17) にこれらを挿入し (26.14)–(26.16) を得る．

[附記]　始めに述べた「不可逆性」については Hamburger の定理 [17, p. 31] を参照して考察せよ．Kuznetsov 理論へは幾つかの近づき方が考えられるが，本節以

下に示す著者 [12, 第 2 章] の方法は比較的に初等的である．等式 (26.19) に含まれる積分の計算は次の通りである．条件 $\mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Re}\,\eta| + \frac{1}{2}$ のもとに，表示 (17.19) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty y^{s-\frac{3}{2}} e^{-y} K_\eta(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \xi^{\eta-1} \int_0^\infty y^{s-\frac{3}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}y(\xi^{\frac{1}{2}}+\xi^{-\frac{1}{2}})^2\right) dy d\xi \\
&= 2^{-2s}\Gamma(s-\tfrac{1}{2}) \int_0^\infty \xi^{s+\eta-\frac{3}{2}}(\xi+1)^{1-2s} d\xi \\
&= (2\pi)^{\frac{1}{2}} 2^{-s}\Gamma(s+\eta-\tfrac{1}{2})\Gamma(s-\eta-\tfrac{1}{2})/\Gamma(s). \qquad (26.21)
\end{aligned}
$$

なお，$Z_{m,n}(s)$ は「Kloosterman 和ゼータ函数」と呼ばれることがある．定義 (26.3) は Selberg によるものとはやや異なる．上記 Linnik 予想の背後にあるのは，Goldbach 予想等を含む「加法的数論」の基本的な原理である (Ramanujan (191?))．即ち，与えられた数列上の加法的な関係ないし条件は Fourier 級数を用いて解析的に表現できるが，その際に多くの場合有理点の近傍での級数の挙動が問題となる．そしてこれは元の数列の算術級数中での分布を問うことと同義である．ここで重要な点は変数である法につき一様な評価が要求されることである．L 篩はこの一様性に代えて統計的な評価にて意味ある結論を導く手段の一つといえる．加法的な条件に乗法的な歪みを加えると法が変数である Kloosterman 和，或いはその一般化が現われる (Kloosterman (1926))．それ故，Linnik 予想の重要性が推し測れよう．

—27—
Kuznetsov 跡公式

補題 26.1 及び 26.2 の応用として，Maass–Fourier 係数のスペクトル平均を示そう．この評価は (25.5) に対応するが，後の議論において重要である．

【補題 27.1】 任意の $K, m \geq 1$ について一様に

$$\sum_{K/2<\kappa_j\leq K} |\rho_j(m)|^2 e^{-\pi\kappa_j} \ll K^2 + d_3(m)m^{\frac{1}{2}}\log(2m). \tag{27.1}$$

証明　等式 (26.6) 及び (26.15) において

$$s_1 = 1+it,\ s_2 = 1-it \quad (|\mathrm{Im}\, t| < \tfrac{1}{4}) \tag{27.2}$$

と置き，解核跡公式 (24.10) に対応する等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} p(t,\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} p(t,r)dr$$
$$= \delta_{m,n}\frac{t}{\pi^2\sinh(\pi t)} + \frac{2t}{\pi\sinh(\pi t)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,n;l)\varpi\Big(t, \frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big) \tag{27.3}$$

を得る．但し，

$$p(t,r) = \frac{\cosh(\pi r)}{\cosh(\pi(r+t))\cosh(\pi(r-t))},$$
$$\varpi(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta}\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta}d\eta \tag{27.4}$$
$$(|\mathrm{Im}\, t| < \alpha < \tfrac{1}{4}).$$

等式 (27.3) にて $m=n$ とし，両辺に

$$\Big\{\exp(-(t/K)^2) - \exp(-(2t/K)^2)\Big\}(\sinh \pi t)/t$$

を乗じて $t \in \mathbb{R}$ につき積分する．絶対収束性を確かめることは容易であり，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\rho_j(m)|^2}{\cosh(\pi\kappa_j)}P^{(1)}(\kappa_j,K) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sigma_{2ir}(m)|^2}{|\zeta(1+2ir)|^2}P^{(1)}(r,K)dr$$
$$= (2\pi^{\frac{3}{2}})^{-1}K + 2\pi^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,m;l)P^{(2)}\big(4\pi m/l, K\big) \tag{27.5}$$

を得る．但し，

$$P^{(1)}(r,K) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,r)\big(e^{-(t/K)^2} - e^{-(2t/K)^2}\big)(\sinh \pi t)\frac{dt}{t}, \tag{27.6}$$

$$P^{(2)}(x,K)=\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(t,x)\Big(e^{-(t/K)^2}-e^{-(2t/K)^2}\Big)dt. \tag{27.7}$$

等式 (27.5) の左辺の各項は非負である故,

$$\sum_{\frac{1}{2}K\le\kappa_j\le K}\frac{|\rho_j(m)|^2}{\cosh(\pi\kappa_j)}P^{(1)}(\kappa_j,K)$$
$$\ll K+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}|S(m,m;l)||P^{(2)}\big(4\pi m/l,K\big)|.$$

ここで,

$$P^{(1)}(r,K)\gg K^{-1}\int_{K/2}^{K}\big(\cosh(\pi(t-r))\big)^{-1}dt\gg K^{-1}\qquad(\tfrac{1}{2}K\le r\le K)$$

に注意して,

$$\sum_{\frac{1}{2}K\le\kappa_j\le K}\frac{|\rho_j(m)|^2}{\cosh(\pi\kappa_j)}$$
$$\ll K^2+K\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}|S(m,m;l)||P^{(2)}\big(4\pi m/l,K\big)|. \tag{27.8}$$

因子 $P^{(2)}(x,K)$ を評価するには工夫が多少必要である．表示 (27.4) にて

$$\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)=\Gamma(2\eta)\int_0^1 y^{\eta+it-1}(1-y)^{\eta-it-1}dy \tag{27.9}$$

を用いれば，(27.7) の右辺は絶対収束する三重積分となる．変数 t についての積分を行い,

$$P^{(2)}(x,K)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta}\Gamma(2\eta)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta}\int_0^1(y(1-y))^{\eta-1}Q(y,K)dyd\eta$$

を得る．但し,

$$Q(y,K)=K\exp\Big(-\Big(\tfrac{1}{2}K\log\frac{y}{1-y}\Big)^2\Big)-\frac{1}{2}K\exp\Big(-\Big(\tfrac{1}{4}K\log\frac{y}{1-y}\Big)^2\Big).$$

任意の $u>0$ 及び $0<a<\frac{1}{4}$ に対して

$$\mathrm{si}(u)=-\int_u^\infty\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\frac{i}{2}\int_{(a)}\frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta}\Gamma(2\eta)u^{-2\eta}d\eta \tag{27.10}$$

である故，

$$\begin{aligned}&P^{(2)}(x,K)\\&=-\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1(y(1-y))^{-1}Q(y,K)\mathrm{si}\Big(\frac{x}{2\sqrt{y(1-y)}}\Big)dy\\&=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1(y(1-y))^{-1}Q(y,K)\Big(\mathrm{si}(x)-\mathrm{si}\Big(\frac{x}{2\sqrt{y(1-y)}}\Big)\Big)dy.\end{aligned} \tag{27.11}$$

但し，

$$\int_0^1(y(1-y))^{-1}Q(y,K)dy=0$$

を用いた．こうして，$\mathrm{si}(u)\ll(1+u)^{-1}$ $(u\ge0)$ に注意して，評価

$$\begin{aligned}&P^{(2)}(x,K)\\&\ll x\int_0^1(y(1-y))^{-1}|Q(y,K)|\min\Big((1+x)^{-1},|\log(4y(1-y))|\Big)dy\\&\ll x\min\Big(\frac{1}{1+x},\frac{1}{K^2}\Big)\ll\frac{x}{x+K^2}\end{aligned} \tag{27.12}$$

を得る．この結果を (27.8) に挿入し，(17.11) により

$$\sum_{K/2<\kappa_j\le K}|\rho_j(m)|^2e^{-\pi\kappa_j}\ll K^2+mK^{-1}\sum_{l=1}^\infty\frac{(l,m)^{\frac{1}{2}}d(l)}{l^{\frac{1}{2}}(l+mK^{-2})}.$$

この無限和は，(1.11)-(1.12) を用いて

$$\begin{aligned}&\ll\sum_{r|m}r^{-\frac{3}{2}}\phi_{\frac{1}{2}}(r)d(r)\sum_{l=1}^\infty l^{-\frac{1}{2}}(l+mr^{-1}K^{-2})^{-1}d(l)\\&\ll Km^{-\frac{1}{2}}\log(2m)\sum_{r|m}r^{-1}\phi_{\frac{1}{2}}(r)d(r)\ll d_3(m)Km^{-\frac{1}{2}}\log(2m).\end{aligned} \tag{27.13}$$

以上をまとめて (27.1) を得る．

次に，Selberg 跡公式 (25.7) に対応する結果を示そう．これを「第一 Kuznetsov 跡公式」という．

【定理 27.1】 函数 f は条件 (25.6) を満たすものとする．このとき，任意の整数 $m, n \geq 1$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} f(\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} f(r)dr$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\delta_{m,n}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh(\pi r)f(r)dr + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,n;l)f_+\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big). \quad (27.14)$$

但し，

$$f_+(x) = \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r}{\cosh(\pi r)}J_{2ir}(x)f(r)dr. \quad (27.15)$$

証明 等式 (27.3) の両辺に因子

$$\cosh(\pi t)f(t+\tfrac{1}{2}i)$$

を乗じて $t \in \mathbb{R}$ につき積分する．先ず，左辺においては評価 (27.1) 及び

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\cosh(\pi t)f(t+\tfrac{1}{2}i)p(t,r)|dt \ll (1+|r|)^{-2-\varepsilon}$$

により絶対収束性を得，等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\pi t)f(t+\tfrac{1}{2}i)p(t,r)dt = f(r) \qquad (r\in\mathbb{R})$$

を用いれば済む．後者を見るには積分路を $\operatorname{Im} t = -\frac{1}{2}$ に移動すればよい．勿論，特異点 $t = \pm r - \frac{1}{2}i$ においては積分路を小半円に沿って修整する必要がある．次に，右辺における絶対収束性は，Kloosterman 和を含む部分について (10.14), (17.11), (25.6) から評価

$$\ll \sum_{l=1}^{\infty} l^{2\alpha-2}|S(m,n;l)|$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{-1-\varepsilon}(1+|u|)^{-1}((1+|t+u|)(1+|t-u|))^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp\left(-\tfrac{1}{2}\pi(|t+u|+|t-u|-2|u|)\right) dtdu < +\infty \qquad (0<\alpha<\tfrac{1}{4})$$

を得て確かめられる．従って，右辺のこの部分は

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l) C\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\,; f\right) \tag{27.16}$$

と書ける．但し，

$$C(x;f) = \frac{1}{\pi^2 i}\int_{(\alpha)} \frac{\sin(\pi\eta)}{\pi\eta} D(\eta;f)\left(\frac{x}{2}\right)^{1-2\eta} d\eta,$$

$$D(\eta;f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\tanh(\pi t)}\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)f(t+\tfrac{1}{2}i)dt.$$

函数 $D(\eta;f)$ は領域 $\mathrm{Re}\,\eta>0$ で正則である．臨時に $\mathrm{Re}\,\eta>\frac{1}{2}$ と仮定して積分路を $\mathrm{Im}\,t=-\frac{1}{2}i$ に移動し，

$$D(\eta;f) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tfrac{1}{2}i)\tanh(\pi t)\Gamma(\eta+\tfrac{1}{2}+it)\Gamma(\eta-\tfrac{1}{2}-it)f(t)dt.$$

函数 f は偶であるから，

$$\begin{aligned} D(\eta;f) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tanh(\pi t)\Big[(t-\tfrac{1}{2}i)\Gamma(\eta+\tfrac{1}{2}+it)\Gamma(\eta-\tfrac{1}{2}-it) \\ &\qquad\qquad +(t+\tfrac{1}{2}i)\Gamma(\eta+\tfrac{1}{2}-it)\Gamma(\eta-\tfrac{1}{2}+it)\Big]f(t)dt. \\ &= \eta\int_{-\infty}^{\infty} t\tanh(\pi t)\Gamma(\eta-\tfrac{1}{2}+it)\Gamma(\eta-\tfrac{1}{2}-it)f(t)dt. \end{aligned}$$

更に，函数等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin(\pi s)$ を用いて

$$\begin{aligned} D(\eta;f) &= \frac{\pi i\eta}{2\sin(\pi\eta)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\cosh(\pi t)}\left\{\frac{\Gamma(\eta-\frac{1}{2}+it)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\eta+it)} - \frac{\Gamma(\eta-\frac{1}{2}-it)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\eta-it)}\right\}f(t)dt \\ &= \frac{\pi i\eta}{\sin(\pi\eta)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\cosh(\pi t)}\frac{\Gamma(\eta-\frac{1}{2}+it)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\eta+it)}f(t)dt \\ &= \frac{\pi i\eta}{\sin(\pi\eta)}\int_{\mathrm{Im}\,t=-\beta} \frac{t}{\cosh(\pi t)}\frac{\Gamma(\eta-\frac{1}{2}+it)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\eta+it)}f(t)dt \qquad (0<\beta<\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

従って，解析接続により条件 $0<\alpha<\frac{1}{4}$，$\alpha+\beta>\frac{1}{2}$ のもとに

$$C(x;f)=\frac{1}{\pi^2}\int_{(\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-2\eta}\int_{\mathrm{Im}\,t=-\beta}\frac{t}{\cosh(\pi t)}\frac{\Gamma(\eta-\frac12+it)}{\Gamma(\frac32-\eta+it)}f(t)dt\,d\eta.$$

評価 (10.14) を再び用いてこの二重積分の絶対収束性を確かめ，

$$C(x;f)=\frac{2i}{\pi}\int_{\mathrm{Im}\,t=-\beta}\frac{t}{\cosh(\pi t)}J_{2it}(x)f(t)dt \tag{27.17}$$

を得る．但し，Barnes 表示

$$J_{2\nu}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\tau)}\frac{\Gamma(\eta-\frac12+\nu)}{\Gamma(\frac32-\eta+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-2\eta}d\eta$$
$$(x>0;\ \tfrac12-\mathrm{Re}\,\nu<\tau<\tfrac12) \tag{27.18}$$

を用いた．Poisson 表示

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac12)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\nu-\frac12}\cos(xy)dy$$
$$(x>0;\ \mathrm{Re}\,\nu>-\tfrac12) \tag{27.19}$$

から得られる評価により (27.17) の積分路は実軸に移動できることが解る故，これらをまとめて定理 27.1 の証明を終わる．

[附記] 定理 27.1 とほぼ同等の結果が Bruggeman (1978) によって独立に得られている．従って，Bruggeman–Kuznetsov 跡公式と呼ぶべきであろうが，Kuznetsov の結果はより完成度が高い．とくに重要な「反転公式」（第 29 節）は彼独自のものである．ただし，Kuznetsov の「Khabarovsk Notes」（1977）は多くの修整を必要とすると共に，根本的な誤りも含む．

—28—
Petersson 跡公式

次節で跡公式 (27.14)–(27.15) の反転，つまり積分変換 (27.15) の逆変換につい

て考察するが，その前に「正則尖点形式」について周知の基礎事項を述べておく必要がある．

固定された正整数 k につき，全上半平面で正則な函数 f が任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$f(z) = (d\gamma(z)/dz)^k f(\gamma(z))$$

を満たすとき，f は重み $2k$ の Γ-正則保型形式と呼ばれ，更に $f(i\infty) = 0$ であれば，重み $2k$ の Γ-正則尖点形式であるという．各 k につき $\mathcal{C}_k(\Gamma)$ にてこれら正則尖点形式全てからなる集合とすれば，$\mathcal{C}_k(\Gamma)$ は内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle_k = \int_{\mathcal{F}} f_1(z)\overline{f_2(z)} y^{2k} d\mu(z)$$

を備えた有限次元ユニタリ空間である．その正規直交系をひと組とり

$$\left\{\psi_{j,k} \,:\, 1 \le j \le \vartheta(k)\right\} \tag{28.1}$$

とする．但し，

$$\vartheta(k) = \begin{cases} 0 & (k = 1), \\ [k/6] - 1 & (k \equiv 1 \bmod 6,\ k \ne 1), \\ [k/6] & (k \not\equiv 1 \bmod 6). \end{cases} \tag{28.2}$$

函数 $\psi_{j,k}(n)$ の Fourier 係数 $\rho_{j,k}(n)$ は展開

$$\psi_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{j,k}(n) n^{k-\frac{1}{2}} e(nz) \tag{28.3}$$

によって定義される．これらは Maass–Fourier 係数と同じく重要な数論的な意味を有する．

次のスペクトル分解 (28.5) は Petersson (1939) によるが，補題 26.1 の雛形となった結果である．また，評価 (28.6) は勿論 (27.1) に対応する．

【補題 28.1】 任意の整数 $k, m, n \ge 1$ について

$$q_{m,n}(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l) J_{2k-1}\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big) \tag{28.4}$$

と置けば,

$$q_{m,n}(k) = \frac{1}{2\pi}(-1)^{k-1}\delta_{m,n} + (-1)^k \frac{\pi}{(2k-1)} a(k) \sum_{j=1}^{\vartheta(k)} \overline{\rho_{j,k}(m)}\rho_{j,k}(n). \tag{28.5}$$

但し, $a(k) = 2^{1-4k}\pi^{-2k-1}\Gamma(2k)$ である. これより, k, m について一様に

$$a(k) \sum_{j=1}^{\vartheta(k)} |\rho_{j,k}(m)|^2 \ll kd_3(m)m^{\frac{1}{2}} \log(2m). \tag{28.6}$$

証明 先ず, 仮定 $k \geq 2$ のもとに考察する. 任意の整数 $m \geq 1$ をとり, Poincaré 級数

$$U_m(z,k) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (d\gamma(z)/dz)^k e(m\gamma(z)) \tag{28.7}$$

を導入する. 勿論, これは (17.7) の類似であり, 重み $2k$ の Γ-正則保型形式であることは見やすい. 等式 (17.9) と同様にして,

$$U_m(z,k) = e(mz) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nz) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2k} S(m,n;l)$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-2\pi i n(\xi + yi) - \frac{2\pi i m}{l^2(\xi + yi)}\Big)(\xi + yi)^{-2k} d\xi.$$

積分路を $\mathrm{Im}\,\xi = +\infty$ に移し $n \leq 0$ であれば積分は 0 であることが解る. そこで, 積分路を $\mathrm{Im}\,\xi = -\infty$ に移し Bessel 函数 J_{2k-1} の定義に従い,

$$U_m(z,k) = e(mz) + 2(-1)^k \pi m^{\frac{1}{2}-k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-\frac{1}{2}} q_{m,n}(k) e(nz) \tag{28.8}$$

を得る. 表示 (27.19) 及び

$$J_{2k-1}(x) = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \cos((2k-1)\theta - x\sin\theta) d\theta \tag{28.9}$$

から得られる評価

$$J_{2k-1}(x) \ll \min\{1, (\tfrac{1}{2}x)^{2k-1}/\Gamma(2k)\} \tag{28.10}$$

により，(28.4) 及び (28.8) は共に絶対収束する．特に，$U_m(+i\infty, k) = 0$ であり，$U_m(z,k)$ は重み $2k$ の Γ-正則尖点形式である．従って，

$$U_m(z,k) = \sum_{j=1}^{\vartheta(k)} \langle U_m(\cdot,k), \psi_{j,k}\rangle_k \psi_{j,k}(z)$$

と展開でき，これより (28.5) が従う．残りの $k=1$ の場合に移るが，評価 (28.10) から，(28.4) 及び (28.8) はやはり絶対収束している．そこで，(28.8) ($k=1$) の右辺にて $U_m(z,1)$ の定義となし，これが重み 2 の Γ-正則保型形式であるとなれば，(28.2)，つまり $\vartheta(1)=0$ から $U_m(z,1) \equiv 0$ である．即ち，$q_{m,n}(1) = -\delta_{m,n}/(2\pi)$ を得，(28.5) が示されたことになる．しかるに，(28.7) の右辺は $k=1$ のとき絶対収束しない．このために，新たに

$$U_m(z,1;s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (d\gamma(z)/dz)|(d\gamma(z)/dz)|^{2s} e(m\gamma(z)) \tag{28.11}$$

を考察する．これは $\mathrm{Re}\, s > 0$ で絶対収束している．上記と同様に

$$U_m(z,1;s) = e(mz) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nz) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2-2s} S(m,n;l)$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (\xi+iy)^{-2}(\xi^2+y^2)^{-s} \exp\left(-2\pi i n(\xi+yi) - \frac{2\pi i m}{l^2(\xi+yi)}\right) d\xi. \tag{28.12}$$

積分路を $\mathrm{Im}\,\xi = -\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(n)y$ に移動すれば解る様に，仮定 $\mathrm{Re}\, s > -\frac{1}{2}$ のもとに，積分は $n<0$ であれば $O(e^{3\pi ny})$，$n \ge 0$ であれば $O(e^{\pi ny})$ である．従って，(17.11) により $U_m(z,1;s)$ は領域 $\mathrm{Re}\, s > -\frac{1}{4}$ に解析接続され，しかも $U_m(+i\infty,1;s) = 0$ である．更に，$U_m(z,1;0) = U_m(z,1)$ であり，且つ，定義から，$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき

$$U_m(z,1;s) = (d\gamma(z)/dz)|(d\gamma(z)/dz)|^{s} U_m(\gamma(z),1;s).$$

これらから，$U_m(z,1)$ は実際に重さ 2 の Γ-正則尖点形式であり，(28.5) を全ての $k \ge 1$ について得たことになる．一方，評価 (28.6) については，(17.11)，(28.5)，

(28.10) より

$$a(k)k^{-1}\sum_{j=1}^{\vartheta(k)}|\rho_{j,k}(m)|^2 \ll 1+\sum_{l\le 2\pi m} l^{-\frac{1}{2}}(m,l)^{\frac{1}{2}}d(l)$$
$$+\Gamma(2k)^{-1}(2\pi m)^{2k-1}\sum_{l\ge 2\pi m} l^{\frac{1}{2}-2k}(m,l)^{\frac{1}{2}}d(l)$$

である故，(27.13) と同様に議論し，証明を終わる．

[附記] よく知られたことであるが，次元公式 (28.2) は初等的に証明できる．例えば，[14] を見よ．着想 (28.11) は Hecke による．実は，以下の議論では，(28.2) を必要としない．単に，$\mathcal{C}_k(\Gamma)$ が有限次元であることが解れば充分である．但し，その場合は上記の議論は多少修整する必要がある．一般的な離散群について考察する場合にはこの着眼点は重要である．[12, pp. 45–49] を参照せよ．

—29—
Kuznetsov 反転

本節では (26.3) にて定義された函数 $Z_{m,n}(s)$ のスペクトル分解を示し，その Mellin 変換を用いて和 (26.1) $(m,n>0)$ を考察する．

【補題 29.1】 Maass–Fourier 係数 $\{\rho_j(n)\}$ は (18.18) で，また $q_{m,n}(k)$ は (28.4) で定義されているものとする．任意の整数 $m,n\ge 1$ 及び $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{4}$ に対して，

$$Z_{m,n}(s)=\frac{1}{2}\sin(\pi s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}\Gamma(s-\tfrac{1}{2}+i\kappa_j)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}-i\kappa_j)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sin(\pi s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\Gamma(s-\tfrac{1}{2}+ir)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}-ir)dr$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)q_{m,n}(k)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}-\frac{1}{2\pi}\delta_{m,n}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}. \tag{29.1}$$

証明　等式 (26.6) にて $s_1=1$，$s_2=s$ とおく．但し，$\mathrm{Re}\,s>1-\alpha$ $(0<\alpha<\frac{1}{4})$ と仮定する．このとき，函数 W は

$$W(x;1,s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(1-\eta)(\eta+s-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\eta}d\eta$$

となるが，これを Neumann 級数に展開しよう．先ず，等式

$$\frac{\Gamma(k+s)\Gamma(k+\eta)}{\Gamma(k+1-s)\Gamma(k+1-\eta)}-\frac{\Gamma(k-1+s)\Gamma(k-1+\eta)}{\Gamma(k-s)\Gamma(k-\eta)}$$
$$=(\eta+s-1)(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)\Gamma(k-1+\eta)}{\Gamma(k+1-s)\Gamma(k+1-\eta)}$$

により，

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(\eta)}{\Gamma(1-s)\Gamma(1-\eta)(\eta+s-1)}=\frac{\Gamma(K+s)\Gamma(K+\eta)}{\Gamma(K+1-s)\Gamma(K+1-\eta)(\eta+s-1)}$$
$$-\sum_{k=1}^{K}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)\Gamma(k-1+\eta)}{\Gamma(k+1-s)\Gamma(k+1-\eta)}.$$

よって，(27.18) を用いて，

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}W(x;1,s)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\frac{\Gamma(K+s)\Gamma(K+\eta)}{\Gamma(K+1-s)\Gamma(K+1-\eta)(\eta+s-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\eta}d\eta$$
$$-\frac{2}{x}\sum_{k=1}^{K}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}J_{2k-1}(x).$$

この積分の $K\to+\infty$ なるときの極限値は $2\pi i(x/2)^{2(s-1)}$ である故，

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}W(x;1,s)$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{2(s-1)} - 2x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}J_{2k-1}(x). \tag{29.2}$$

そこで，$x = 4\pi\sqrt{mn}/l$ を代入し，両辺に因子 $2\pi\sqrt{mn}S(m,n;l)l^{-2}$ を乗じて l について和をとれば，

$$\begin{aligned} Z_{m,n}(s) &= 2\pi\sqrt{mn}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\sum_{l=1}^{\infty} l^{-2}S(m,n;l)W\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn};1,s\right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} S(m,n;l)l^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}J_{2k-1}\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\right). \end{aligned}$$

二重和は評価 (28.11) により絶対収束である．和の順序を交換し，(26.6) と定義 (28.4) に注意して，

$$\begin{aligned} Z_{m,n}(s) &= 2\sqrt{mn}(4\pi n)^{s-1}\langle P_m(\cdot,1), P_n(\cdot,\overline{s})\rangle/\Gamma(1-s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)q_{m,n}(k)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)} - \frac{1}{2\pi}\delta_{m,n}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}. \end{aligned}$$

ここに，(26.15) $(s_1 = 1, s_2 = s)$ を挿入して (29.1) を得る．

次に，「第一 Kuznetsov 和公式」，即ち

$$K_+(m,n;\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,n;l)\varphi\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\right) \qquad (m,n \geq 1) \tag{29.3}$$

のスペクトル分解を示そう．函数 φ を変換して

$$\varphi^*(s) = \int_0^{\infty}\varphi(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-2s}dx \tag{29.4}$$

とすれば，適当に α をとり，

$$K_+(m,n;\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} Z_{m,n}(s)\varphi^*(s)ds \tag{29.5}$$

と書ける．勿論，必要な絶対収束性を保証するために φ に何らかの条件を科さね

ばならない．ここでは，比較的ゆるやかな条件として，$\nu = 0,1,2,3$ について

$$\varphi^{(\nu)}(x) \ll \begin{cases} x^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\nu} & (x \to +0), \\ x^{-1-\varepsilon-\nu} & (x \to +\infty) \end{cases} \tag{29.6}$$

であると仮定する．

【定理 29.1】 記号 $\rho_j(n)$，$\rho_{j,k}(n)$ は上記の通りとし，函数 φ は条件 (29.6) を満たすものとする．このとき，任意の整数 $m, n \geq 1$ について

$$K_+(m,n;\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}\varphi^+(\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\varphi^+(r)dr$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} a(k) \sum_{j=1}^{\vartheta(k)} \overline{\rho_{j,k}(m)}\rho_{j,k}(n)\varphi^+((\tfrac{1}{2}-k)i). \tag{29.7}$$

但し，

$$\varphi^+(r) = \frac{\pi i}{2\sinh(\pi r)} \int_0^{\infty} (J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x))\varphi(x)\frac{dx}{x}. \tag{29.8}$$

証明　条件 (29.6) のもとに変換 $\varphi^*(s)$ は領域

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon < \mathrm{Re}\, s < \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{29.9}$$

で正則であり，部分積分により

$$\varphi^*(s) \ll (1+|s|)^{-3}. \tag{29.10}$$

特に，垂直線 (α) が領域 (29.9) に含まれるならば

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \varphi^*(s)\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} ds. \tag{29.11}$$

よって，表現 (29.5) は条件

$$\tfrac{3}{4} < \alpha < \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{29.12}$$

のもとで成立している．そこでこれを仮定し，(29.1) を (29.5) に挿入し

$$K_+(m,n;\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)h(s,\kappa_j)ds$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)h(s,r)dsdr$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)q_{m,n}(k)\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}ds$$
$$-\frac{1}{2\pi}\delta_{m,n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}ds. \tag{29.13}$$

但し,

$$h(s,r)=\frac{1}{2}\sin(\pi s)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}+ir)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}-ir).$$

勿論, (29.13) の右辺における絶対収束性を確かめねばならない. このために,

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j(m)\rho_j(n)|e^{-\pi\kappa_j}\int_{(\alpha)}|\varphi^*(s)h(s,\kappa_j)||ds|<+\infty \tag{29.14}$$

を示す. 評価 (10.14) 及び (29.10) により任意の $r\in\mathbb{R}$, $s=\alpha+it$ について

$$\varphi^*(s)h(s,r)\ll\exp\big(-\tfrac{1}{2}\pi(|t+r|+|t-r|-2|t|)\big)$$
$$\times((1+|t+r|)(1+|t-r|))^{\alpha-1}(1+|t|)^{-3}.$$

従って,

$$\int_{(\alpha)}|\varphi^*(s)h(s,r)||ds|\ll(1+|r|)^{2\alpha-4}$$

であり, (27.1) を用いて (29.14) を得る. また, この評価と (4.13) により (29.13) の二重積分も絶対収束である. 更に, 評価

$$\int_{(\alpha)}\left|\varphi^*(s)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}\right||ds|\ll k^{2(\alpha-1)}$$

は容易であり, (28.11) により (29.13) の k についての和も絶対収束である. よって, 等式 (29.13) は確かめられた.

次に, k についての和を Petersson 跡公式 (28.5) を用いて変形する. そのため

に，等式

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\\
&=\sum_{k=1}^{K}(-1)^{k-1}\left\{\frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(k+1-s)}+\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k-s)}\right\}+(-1)^K\frac{\Gamma(K+s)}{\Gamma(K+1-s)}\\
&=\sum_{k=1}^{K}(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}+(-1)^K\frac{\Gamma(K+s)}{\Gamma(K+1-s)}
\end{aligned}$$

に注意する．つまり，(29.12) のもとに

$$\begin{aligned}
&\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}ds\\
&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}ds
\end{aligned}\tag{29.15}$$

となり，(29.13) の最後の二項の和は

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a(k)\sum_{j=1}^{\vartheta(k)}\overline{\rho_{j,k}(m)}\rho_{j,k}(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}ds$$

に等しい．従って，

$$\begin{aligned}
K_+(m,n;\varphi)&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}(u(\kappa_j,\varphi)+u(-\kappa_j,\varphi))\\
&\quad+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}u(r,\varphi)dr\\
&\quad+4\sum_{k=1}^{\infty}a(k)\sum_{j=1}^{\vartheta(k)}\overline{\rho_{j,k}(m)}\rho_{j,k}(n)u((\tfrac{1}{2}-k)i,\varphi).
\end{aligned}\tag{29.16}$$

但し，

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{8\sinh(\pi r)}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2}+ir)}{\Gamma(\frac{3}{2}-s+ir)}ds.$$

この積分は $\mathrm{Im}\, r < \alpha - \frac{1}{2}$ なる r について正則である．そこで，臨時に $\mathrm{Im}\, r = -\frac{1}{4}$ と仮定する．積分路を $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{3}$ に移動し，(29.4) を挿入して得られる二重積分は絶対収束である．積分の順序を交換し，(27.18) を用いて

$$\int_{(\frac{1}{3})} \cdots ds = \int_0^\infty \varphi(x) \int_{(\frac{1}{3})} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2}+ir)}{\Gamma(\frac{3}{2}-s+ir)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-2s} ds dx$$

$$= 4\pi i \int_0^\infty J_{2ir}(x)\varphi(x)\frac{dx}{x}.$$

この最後の積分は (27.18) と (29.6) により，領域 $-\frac{1}{2} < \mathrm{Im}\, r < \frac{1}{4}$ において正則であり，特に $r \in \mathbb{R}$ について

$$u(r,\varphi) = \frac{\pi i}{2\sinh(\pi r)} \int_0^\infty J_{2ir}(x)\varphi(x)\frac{dx}{x}.$$

詳細は省くが，$r = (\frac{1}{2}-k)i$ $(\mathbb{Z} \ni k \geq 1)$ についても同様にしてこの等式を示すことができる故，(26.16) に挿入して定理 29.1 の証明を終わる．

[附記]　定理 29.1 は Kuznetsov 理論の中で最も重要な結果と思われるが，定理 27.1 からみれば関係式

$$\varphi(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{r}{\cosh(\pi r)} J_{2ir}(x)\varphi^+(r)dr$$
$$+ \sum_{k=1}^\infty (2k-1)J_{2k-1}(x)\varphi^+((\tfrac{1}{2}-k)i) \qquad (29.17)$$

と同義である．等式 (29.15) を

$$\int_{(\alpha)} \varphi^*(s)\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}ds = -i\int_{-\infty}^\infty r\tanh(\pi r)\varphi^+(r)dr \qquad (29.18)$$

と書き直し，(29.13) を (27.14) と比較すればよい．つまり，「スペクトル分解式」(29.17) を用いれば，定理 29.1 は定理 27.1 の自明な系となる．Bessel 函数論でよく知られた「Gegenbauer 展開」(1877)

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} = \sum_{n=0}^\infty (2s+2n-1)\frac{\Gamma(2s+n-1)}{n!}J_{2s+2n-1}(x) \qquad (29.19)$$

を用いれば，(29.17) の証明は容易である．実際，これを

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} = i\pi^{-1}\sin(\pi s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r}{\cosh(\pi r)}J_{2ir}(x)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}+ir)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}-ir)ds$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)J_{2k-1}(x)\frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(k+1-s)} \tag{29.20}$$

と変形の後，両辺に $\varphi^*(s)$ を乗じて積分し (29.17) に至る．なお，(29.18) 及び (29.20) は各々の r-積分において積分路を $\mathrm{Im}\, r = -\infty$ に移動することにより得られる．収束条件等は読者自ら確かめよ．実は，

$$W(x;s_1,s_2) = i\frac{(x/2)^{1-2s_1}}{\pi\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_1+s_2-1)}\int_{-\infty}^{\infty} rJ_{2ir}(x)\Theta(s_1,s_2;r)dr$$

なる等式を直接に示すことができる故，(29.2) は当然ながら (29.19) と同値である．詳細は [12, pp. 72–78] を見よ．Gegenbauer 展開など Bessel 函数の興味深い理論については [20] を見よ．補題 17.3 によって微分作用素 $-(d/dy)^2+1+s(s-1)/y^2$ の解核が

$$i\pi^{-1}\sqrt{yv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r}{(s-\frac{1}{2})^2+r^2}I_{ir}(y)K_{ir}(v)dr$$
$$=\pi^{-2}\sqrt{yv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\sinh(\pi r)}{(s-\frac{1}{2})^2+r^2}K_{ir}(y)K_{ir}(v)dr \tag{29.21}$$

に等しいことを知り，これを用いて本附記も含めて今までの議論を統一的に展開することも可能である．しかしながら，冗長な計算にも効あることを再び強調しておく．Bessel 函数論は 19 世紀後半に華やかな展開を成したが，その印象的な一角が現代的な文脈の中で立ち現われることに感動を覚える．なお実解的保型函数論のなかに正則保型形式が現われることは不思議な印象をあたえる．しかし，リー群 $SL(2,\mathbb{R})$ のユニタリ表現の立場からは，この現象は予見できることである．つまり正則保型形式の寄与は，極大コンパクト部分群の役割が表面化したものと考えられる．

—30—
異符号の場合

本節では和

$$K_-(m,n;\varphi)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,-n;l)\varphi(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn})\qquad(m,n\ge 1)$$

のスペクトル分解を示す．議論は和 $K_+(m,n;\varphi)$ の場合よりも容易である．

先ず，内積 $\langle P_m(\cdot,s_1),\overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle$ を幾何的に計算して (26.6) と同様に

$$\langle P_m(\cdot,s_1),\overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle=2^{2(1-s_2)}\pi^{s_1-s_2+1}n^{s_1-s_2}\frac{\Gamma(s_1+s_2-1)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}$$
$$\times\sum_{l=1}^{\infty}l^{-2s_1}S(m,-n\,;l)W_-\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn};s_1,s_2\right)$$

を得る．但し， s_1， s_2， α は (26.5) を満たし，

$$W_-(x;s_1,s_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\Gamma(\eta)\Gamma(\eta+s_2-s_1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\eta}d\eta \tag{30.1}$$

である．表示式

$$K_{2\nu}(x)=\frac{1}{4\pi i}\int_{(\beta)}\Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu)\left(\frac{x}{2}\right)^{-2s}ds\quad(\beta>|\mathrm{Re}\,\nu|) \tag{30.2}$$

を用いれば，函数 $W_-(x;s_1,s_2)$ は K-Bessel 函数にて表示できるが，以下の目的には (30.1) の方が有効である．また，(26.15) と同様に，条件 $\mathrm{Re}\,s_1,\mathrm{Re}\,s_2>\frac{3}{4}$ もとに

$$\langle P_m(\cdot,s_1),\overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle=\frac{\pi}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}(4\pi\sqrt{mn})^{1-s_1-s_2}(n/m)^{\frac{1}{2}(s_1-s_2)}$$
$$\times\Bigg\{\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)\Theta(s_1,s_2;\kappa_j)$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)\cosh(\pi r)\Theta(s_1,s_2;r)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}dr\Bigg\}.$$

これらを (27.2) によって特殊化し，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}p(t,\kappa_j)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}p(t,r)dr$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,-n;l)\varpi_-\Big(t,\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big) \tag{30.3}$$

を得る．但し，$p(t,r)$ は (27.3) におけると同じであり，

$$\varpi_-(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta}d\eta \qquad (|\mathrm{Im}\,t|<\alpha<\tfrac14).$$

定理 27.1 に対応する結果を得るために，函数 f は (25.6) を満たすとして等式 (30.3) の両辺に因子 $\cosh(\pi t)f(t+\frac12 i)$ を乗じて $t\in\mathbb{R}$ につき積分する．必要となる絶対収束性の確認は以前より容易である．従って，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varpi_-(t,x)\cosh(\pi t)f(t+\tfrac12 i)dt$$

の変形のみが問題となるが，ϖ_- の定義からこれは

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\cosh(\pi t)\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)f(t+\tfrac12 i)dtd\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\beta)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots dtd\eta \qquad (\beta=\tfrac12(1+\tfrac12\varepsilon)). \tag{30.4}$$

積分路を $\mathrm{Im}\,t=-\frac12$ に移動して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots dt=-i\int_{-\infty}^{\infty}\sinh(\pi t)\Gamma(\eta+it+\tfrac12)\Gamma(\eta-it-\tfrac12)f(t)dt$$

$$=-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sinh(\pi t)\Big\{\Gamma(\eta+it+\tfrac12)\Gamma(\eta-it-\tfrac12)$$

$$-\Gamma(\eta-it+\tfrac12)\Gamma(\eta+it-\tfrac12)\Big\}f(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}t\sinh(\pi t)\Gamma(\eta+it-\tfrac12)\Gamma(\eta-it-\tfrac12)f(t)dt.$$

もとに戻り，(30.4) に挿入し，(30.2) を用いて「第二 Kuznetsov 跡公式」を得る．

【定理 30.1】 条件 (25.6) のもとに，任意の整数 $m,n\geq 1$ について

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}f(\kappa_j)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}f(r)dr$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,-n;l)f_-\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big). \tag{30.5}$$

但し，

$$f_-(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}r\sinh(\pi r)K_{2ir}(x)f(r)dr. \tag{30.6}$$

次に，等式 (30.5) の反転を試みる．以下，仮定 (29.6) のもとに考察する．先ず，

$$W_-(x;s,s+\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}e^{-x}$$

に注意する．これは，$K_{\frac{1}{2}}(x)=(\pi/(2x))^{\frac{1}{2}}e^{-x}$ と同値である．つまり，$\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{4}$ のとき

$$(2\pi\sqrt{mn})^{2s-1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{2s}}S(m,-n;l)\exp\Big(-\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}\lambda(s,\kappa_j)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\lambda(s,r)dr. \tag{30.7}$$

但し，

$$\lambda(s,r)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cosh(\pi r)\frac{\Theta(s,s+\frac{1}{2};r)}{\Gamma(2s-\frac{1}{2})}$$
$$=2^{3-4s}\sqrt{\pi}\cosh(\pi r)\frac{\Gamma(2s-1+2ir)\Gamma(2s-1-2ir)}{\Gamma(2s-\frac{1}{2})}$$

であるが，(26.21) から

$$\lambda(s,r)=2\cosh(\pi r)\int_0^{\infty}e^{-x}K_{2ir}(x)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s-1}\frac{dx}{x}. \tag{30.8}$$

等式 (30.7) を積分して，和 $K_-(m,n;\varphi)$ を導く訳であるが，多少の工夫が必要で

ある．このために，C^∞-級函数 ω_X は条件

$$\omega_X(x) = \begin{cases} 1 & (x \le X), \\ 0 & (x \ge 2X) \end{cases}$$

及び，

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\nu \omega_X(x) \ll X^{-\nu} \tag{30.9}$$

を満たすものとし，

$$\theta_X(x) = e^x \omega_X(x) \varphi(x),$$
$$\theta_X^*(s) = \int_0^\infty \theta_X(x) \left(\frac{x}{2}\right)^{-2s} dx$$

とおく．以下， $X > 4\pi\sqrt{mn}$ と仮定するが，当然に

$$K_-(m,n\,;\varphi) = \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l} S(m,-n\,;l) \exp\left(-\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\right) \theta_X\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\right).$$

等式 (29.13) と同様にして，(30.7) から

$$K_-(m,n;\varphi) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} \lambda_X(\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} \lambda_X(r) dr. \tag{30.10}$$

但し，

$$\lambda_X(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha)} \lambda(s,r) \theta_X^*(s) ds \qquad \left(\tfrac{3}{4} < \alpha < \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\right)$$

であるが，(30.8) により

$$\lambda_X(r) = 2\cosh(\pi r) \int_0^\infty \omega_X(x) \varphi(x) K_{2ir}(x) \frac{dx}{x}.$$

函数 $\varphi^-(r)$ は下記 (30.12) にて定義されているものとすれば，

$$\varphi^-(r) - \lambda_X(r)$$

$$= 2\cosh(\pi r)\int_0^\infty (1-\omega_X(x))\varphi(x)K_{2ir}(x)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\cosh(\pi r)\int_{(\beta)}\Gamma(s-\tfrac{1}{2}+ir)\Gamma(s-\tfrac{1}{2}-ir)((1-\omega_X)\varphi)^*(s)ds.$$

但し，$\beta > \frac{1}{2}$，且つ

$$((1-\omega_X)\varphi)^*(s) = \int_0^\infty (1-\omega_X(x))\varphi(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-2s}dx.$$

仮定 (29.6) 及び (30.9) によりこれはは領域 $\mathrm{Re}\, s \geq -\frac{1}{4}\varepsilon$ にて正則，且つ

$$((1-\omega_X)\varphi)^*(s) \ll X^{-\frac{1}{2}\varepsilon}(|s|+1)^{-3}.$$

従って，

$$\begin{aligned}\varphi^-(r) - \lambda_X(r) &= \frac{1}{4\pi i}\cosh(\pi r)\int_{(-\frac{1}{4}\varepsilon)}\cdots ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\cosh(\pi r)((1-\omega_X)\varphi)^*(\tfrac{1}{2}+ir)\Gamma(2ir) \\ &\quad + \frac{1}{2}\cosh(\pi r)((1-\omega_X)\varphi)^*(\tfrac{1}{2}-ir)\Gamma(-2ir) \\ &\ll X^{-\frac{1}{2}\varepsilon}(1+|r|)^{-2-\frac{1}{2}\varepsilon}\end{aligned}$$

この結果を (30.10) に挿入し，評価 (27.1) に注意して $X \to +\infty$ とし，「第二 Kuznetsov 和公式」を得る．

【定理 30.2】 仮定 (26.5) のもとに，任意の整数 $m, n \geq 1$ について

$$\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l}S(m,-n;l)\varphi\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\right) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}\varphi^-(\kappa_j)$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\varphi^-(r)dr. \tag{30.11}$$

但し，

$$\varphi^-(r) = 2\cosh(\pi r)\int_0^\infty \varphi(x)K_{2ir}(x)\frac{dx}{x}. \tag{30.12}$$

[附記]　定理 30.1 と 30.2 を比較して予見されるが，変換 (30.6) と (30.12) との関係は可逆であり $(\varphi^-)_- = \varphi$，つまり

$$\varphi(y) = \pi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} r \sinh(\pi r) K_{ir}(y) \int_0^{\infty} \varphi(x) K_{ir}(x) x^{-1} dx dr. \tag{30.13}$$

これを Kontorovitch–Lebedev 反転公式 (1946) という．従って，(30.13) を直接に証明し，定理 30.2 を 30.1 の系としてもよい．前節の附記にて示唆した様に，(30.13) も (29.21) が解核であるという事実の帰結である．詳細については [12，p. 72–73] を見よ．

—31—
Hecke

以上にてモジュラー群 Γ に係わる跡公式理論を終わり，本節では再び第 16 節の着想に戻りその数論的な意味を吟味する．先ず，(16.4) に現われる「Hecke 作用素」について基礎事実を示す必要がある．

このために，任意の整数 $n \geq 1$ について

$$\mathbb{M}(n) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{lz+h} : ah - bl = n;\ a, b, l, h \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおく．函数 f はΓ-保型であるとすれば，作用 $f(z) \mapsto f(M(z))$ $(M \in \mathbb{M}(n))$ は M の属する Γ-左剰余類によって定まる．そこで，$\{M_\nu\}$ を代表系とし分解

$$\mathbb{M}(n) = \bigcup_\nu \Gamma M_\nu$$

を考える．既に (16.4) で言及した様に，代表系として集合

$$\{z \mapsto (az+b)/d : ad = n,\ 0 \leq b < d\} \tag{31.1}$$

をとることができる．実際，任意の $M \in \mathbb{M}(n)$ に対して$\gamma \in \Gamma$ を選び $(\gamma M)(z)$ の分母が常数となる様にでき，更に Γ_∞ の元を適当に作用させればよい．また，

(31.1) の各元が Γ につき相異なる左剰余類を生成することを見るのは容易である．従って，

$$(T(n)f)(z) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} \sum_{b \bmod d} f((az+b)/d) \tag{31.2}$$

は再び Γ-保型である．この $T(n)$ を Hecke 作用素という．

【補題 31.1】

$$T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} T\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{31.3}$$

証明　整数 m, n が互いに素であれば，定義式 (31.2) により $T(m)T(n) = T(mn)$ を見ることは容易である．つまり，ある素数 p について等式

$$T(p^u)T(p^v) = \sum_{l=0}^{\min(u,v)} T(p^{u+v-2l}) \qquad (u, v \geq 0) \tag{31.4}$$

を確かめればよい．先ず，

$$(T(p)f)(z) = p^{-\frac{1}{2}} \left\{ f(pz) + \sum_{h=0}^{p-1} f((z+h)/p) \right\} \tag{31.5}$$

と書き，

$$(T(p^r)T(p)f)(z) = p^{-(r+1)/2} \sum_{u=0}^{r} \sum_{b=0}^{p^u-1} \left\{ f((p^{r-u+1}z + pb)/p^u) + \sum_{h=0}^{p-1} f((p^{r-u}z + b + hp^u)/p^{u+1}) \right\}.$$

変数 h を含む部分は全体として $(T(p^{r+1})f)(z) - p^{-(r+1)/2} f(p^{r+1}z)$ であることは見やすい．残りの部分で $u = 0$ に対応するのは $p^{-(r+1)/2} f(p^{r+1}z)$ のみである．また，$u \geq 1$ であれば変数 b についての和は勿論

$$p \sum_{b'=0}^{p^{u-1}-1} f((p^{r-u}z + b')/p^{u-1})$$

であるから，全体としては $(T(p^{r-1})f)(z)$ に等しい．これらより，

$$T(p^r)T(p) = T(p^{r+1}) + T(p^{r-1}) \quad (r \geq 1). \tag{31.6}$$

これは (31.4) の特別の場合であり，且つ $T(p^r)$ は $T(p)$ の多項式であることを示している．一般の場合については，

$$U(\lambda, \mu) = T(p^\lambda)T(p^\mu) - T(p^{\lambda+1})T(p^{\mu-1}) \quad (\lambda \geq 0,\ \mu \geq 1)$$

とおく．左辺を等式 (31.6) から得られる $T(p^{\lambda+1}) = T(p^\lambda)T(p) - T(p^{\lambda-1})$ にて変形し，その結果に再度 (31.6) $(r = \mu - 1)$ を用いて，

$$U(\lambda, \mu) = U(\lambda - 1, \mu - 1).$$

特に，

$$U(u+v-l, l) = U(u+v-2l+1, 1) = T(p^{u+v-2l}) \qquad (1 \leq l \leq u \leq v).$$

これを $l = 1, 2, \cdots, u$ について加え，(31.4) を得る．

【補題 31.2】 Hecke 作用素は $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 内の Δ の任意の固有空間にて Hermite 作用素である．

証明　集合 $\mathbb{M}(n)$ は $\mathbb{T}(\mathcal{H})$ の部分集合である故，Δ は Hecke 作用素と交換可能である．従って，前補題の証明中で示したことにより，任意の素数 p 及び f_1, $f_2 \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ について

$$\langle T(p)f_1, f_2\rangle = \langle f_1, T(p)f_2\rangle \tag{31.7}$$

であることを言えば足りる．そこで，

$$\imath_p(z) = -1/(pz); \quad \gamma_h(z) = -1/(z+h) \quad (0 \leq h < p), \quad \gamma_p(z) = z$$

として，

$$(T(p)f)(z) = p^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{p} f(\imath_p \gamma_h(z)).$$

と書く．等式 (31.7) は

$$\int_{\mathcal{P}} f_1(\imath_p(z))\overline{f_2(z)}d\mu(z) = \int_{\mathcal{P}} f_1(z)\overline{f_2(\imath_p(z))}d\mu(z)$$
$$= \int_{\imath_p(\mathcal{P})} f_1(\imath_p(z))\overline{f_2(z)}d\mu(z) \tag{31.8}$$

と同値である．但し，

$$\mathcal{P} = \bigcup_{h=0}^{p} \gamma_h(\mathcal{F}). \tag{31.9}$$

等式 (31.8) を示すためには「合同部分群」

$$\Gamma_0(p) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{lz+h} : a, b, l, h \in \mathbb{Z}; ah - bl = 1,\ l \equiv 0 \bmod p \right\} \tag{31.10}$$

について，

$$\Gamma = \bigcup_{h=0}^{p} \Gamma_0(p)\gamma_h \tag{31.11}$$

が剰余類分解であることを用いる．特に，集合 $\mathcal{P}$ は $\Gamma_0(p)$ の基本領域である．また，Fricke 等式

$$\imath_p \Gamma_0(p) = \Gamma_0(p)\imath_p$$

により $\imath_p(\mathcal{P})$ も $\Gamma_0(p)$ の基本領域であり，且つ (31.8) における $f_1(\imath_p(z))$ は $\Gamma_0(p)$-保型函数である．これらより，(31.8) は直ちに従う．

上記の二補題から，定理 18.1 にて導入された正規直交系 $\{\psi_j(z) : j \geq 1\}$ は各元が全ての Hecke 作用素の同時固有函数であると仮定できる．つまり，任意の $j, n \geq 1$ に対して

$$T(n)\psi_j = t_j(n)\psi_j \tag{31.12}$$

なる「実数」$t_j(n)$ が存在するとしてよい．これらを「Hecke 固有値」という．更に鏡像作用素 $z \mapsto -\overline{z}$ を考慮に入れ，関係式 (31.12) に加えて

$$\psi_j(-\overline{z}) = \epsilon_j \psi_j(z) \quad (\epsilon_j = \pm 1; j \geq 1) \tag{31.13}$$

としてよい．勿論，

$$t_j(m)t_j(n) = \sum_{d|(m,n)} t_j\left(\frac{mn}{d^2}\right) \qquad (m, n \geq 1) \tag{31.14}$$

である．また，(31.13) を定義式

$$t_j(-n) = t_j(-1)t_j(n) = \epsilon_j t_j(n) \qquad (n \neq 0) \tag{31.15}$$

の内容とみなしてよい．展開 (18.18) に戻り，

$$\begin{aligned}
&(T(n)\psi_j)(z)\\
&= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} \sqrt{ay/d} \sum_{m\neq 0} \rho_j(m) K_{i\kappa_j}(2\pi a|m|y/d) e(amx/d) \sum_{b \bmod d} e(bm/d)\\
&= \sqrt{y} \sum_{ad=n} \sum_{m \neq 0} \rho_j(dm) K_{i\kappa_j}(2\pi a|m|y) e(amx)
\end{aligned}$$

である故，(31.12)–(31.13) は

$$\rho_j(n) = \rho_j(1)t_j(n), \quad \rho_j(-n) = \varepsilon_j \rho_j(n) \quad (j,\, n \geq 1) \tag{31.16}$$

と同義である．特に，

$$\rho_j(1) \neq 0 \qquad (j \geq 1). \tag{31.17}$$

固有値 $t_j(n)$ の個別の大きさは以下の議論では余り本質的ではないが，j, n について一様な評価

$$t_j(n) \ll n^{\frac{1}{4}+\epsilon} \tag{31.18}$$

を示しておこう．先ず，

$$|\rho_j(1)t_j(n)| \leq \tau n^{\alpha} \qquad (j, n \geq 1)$$

と仮定する．平均値 (27.1) から任意の固定された $\alpha > \frac{1}{4}$ をとることができる．等式 (31.14) で $m = n$ とし，

$$|\rho_j(1)t_j(n)^2| \leq \tau\sigma_{-2\alpha} n^{2\alpha}.$$

つまり，

$$|\rho_j(1)t_j(n)| \le \tau^{\frac{1}{2}}|\rho_j(1)\xi_{2\alpha}(n)|^{\frac{1}{2}}n^{\alpha}.$$

但し，

$$\xi_\sigma(n) = \prod_{p|n}(1-p^{-\sigma})^{-1}.$$

この操作を反復して，任意の $r \ge 1$ について

$$|\rho_j(1)t_j(n)| \le \tau^{2^{-r}}|\rho_j(1)\xi_{2\alpha}(n)|^{1-2^{-r}}n^{\alpha}.$$

これより，$|t_j(n)| \le \xi_{2\alpha}(n)n^{\alpha}$，従って (31.18) を得る．

次に，第 28 節 で導入した正則保型形式の空間 $\mathcal{C}_k(\Gamma)$ において Hecke 作用素 $T_k(n)$ を

$$(T_k(n)f)(z) = n^{-\frac{1}{2}}\sum_{ad=n}(a/d)^k\sum_{b=1}^{d}f((az+b)/d) \tag{31.19}$$

にて定義する．右辺は f と共に $\mathcal{C}_k(\Gamma)$ に属する．これを見るために，

$$(T_k(n)f)(z) = n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu}f(M_\nu(z))\left(\frac{d}{dz}M_\nu(z)\right)^k$$

と書き換える．但し，M_ν は代表系 (31.1) の上を動く．任意の $\gamma \in \Gamma$ について，

$$\begin{aligned}(T_k(n)f)(\gamma(z))(d\gamma(z)/dz)^{2k} &= n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu}f((M_\nu\gamma)(z))\left(\frac{d}{dz}(M_\nu\gamma)(z)\right)^k \\ &= n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu}f((\tau_\nu M_\nu)(z))\left(\frac{d}{dz}(\tau_\nu M_\nu)(z)\right)^k.\end{aligned}$$

但し，$\tau_\nu \in \Gamma$ である．これより $(T_k(n)f)(\gamma(z))(d\gamma(z)/dz)^{2k} = (T_k(n)f)(z)$ が従う．また，$(T_k(n)f)(i\infty) = 0$ は自明である．そこで，作用素 $T(n)$ についての議論を $T_k(n)$ にも適用し，

$$T_k(m)T_k(n) = \sum_{d\,|\,(m,n)}T_k\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

及び，

$$\langle T_k(n)f_1, f_2\rangle_k = \langle f_1, T_k(n)f_2\rangle_k \quad \bigl(f_1,\, f_2 \in \mathcal{C}_k(\Gamma)\bigr)$$

を得る．特に，(28.1) にて導入された正規直交系 $\{\psi_{j,k} : 1 \le j \le \vartheta(k)\}$ につき

$$T_k(n)\psi_{j,k} = t_{j,k}(n)\psi_{j,k} \qquad (n \ge 1) \tag{31.20}$$

と仮定できる．これら実数 $t_{j,k}(n)$ はやはり Hecke 固有値とよばれる．展開 (28.3) においては

$$\rho_{j,k}(n) = \rho_{j,k}(1)t_{j,k}(n) \tag{31.21}$$

となる．平均値 (28.6) より $j, k, n \ge 1$ について一様な評価

$$t_{j,k}(n) \ll n^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \tag{31.22}$$

が従う．

[附記]　言うまでもなく，歴史的には後段の正則保型形式に対する Hecke 作用素が先に導入された． 後に展開する $\zeta(s)$ への応用においては正則保型形式の役割は本質的なものではなく，前段の Maass (1943) による議論が重要である．例えて言うならば，正則保型形式は $\zeta(s)$ の自明な零点に対応し，実解析的保型形式は複素零点に対応する．この対照はいずれ詳細にされる．この様な意味において，Hecke 固有値 $\{t_j(n)\}$ が今後の議論で本質的である．数論の種々の問題において，Hecke 固有値の大きさの評価が重要となるが，既に注意した様に本書の対象とするところでは個別の評価はさ程重要ではない．他の様々な場面で目撃される現象と同じく，$\{t_j(n)\}$ の「統計的」評価がより本質的と思われる．しかし,「Ramanujan 予想」については述べておくべきであろう．これは，評価

$$t_j(n) \ll n^{\varepsilon} \tag{31.23}$$

の成立を主張するものである．近年,「対称積 L-函数」を用いて (31.22) における「$\frac{1}{4}$ の壁」を破る結果等が報告されているが，それらを含め (31.23) のゼータ函数論における意味は今だ不明である．一方，正則保型形式についての Ramanujan 予想は周知の様に Deligne (1974) によって 肯定的に解決されている．だがやはり古典的な数論の問題についてはこの様な絶対的評価よりも， Kloosterman 和についての Linnik 予想の如く，$t_j(n)$ の符号変化による「打ち消し合い」の検出が重要である．一つの形式としては，Kuznetsov 評価 (27.1) を拡張し

$$\sum_{\kappa_j \le K} |\rho_j(1)|^2 \Big| \sum_{N \le n \le 2N} a(n)t_j(n)\Big|^2$$

を考察することとなる．但し，係数 $a(n)$ は任意である．多少の変形の後に，定理 27.1 により問題は

$$\sum_{l\le L}\Big|\sum_{N\le m,n\le 2N} a(m)\overline{a(n)}S(m,n;l)\Big|$$
$$\le \sum_{l\le L}\sum_{\substack{h=1\\(h,l)=1}}^{l}\Big|\sum_{N\le n\le 2N} a(n)e\Big(\frac{h}{l}n\Big)\Big|^2$$

の評価に帰着されるが，これは正に第 10 節にて触れた Linnik–Bombieri の L 篩によって処理されるものである．つまり，Kuznetsov 跡公式を経由して，古典 L 篩がスペクトル理論に新しい観点を与え，統計的ながら Weil 評価 (17.11) を超えることを可能とするのである．この拡張は Iwaniec (1979) による．本節については，[12，pp. 97–104，131–138] を参照せよ．Hecke 作用素一般については [14] を参照せよ．

—32—
Hecke L-函数

保型形式論からの準備の締めくくりとして「Hecke L-函数」について基礎事項を示そう．これより以下終節まで (31.12)–(31.13) 及び (31.20) を常に前提とする．つまり，関係式

$$\rho_j(n)=\rho_1(1)t_j(n),\quad \rho_j(-n)=\epsilon_j\rho_j(n),\quad \rho_{j,k}(n)=\rho_{j,k}(1)t_{j,k}(n) \tag{32.1}$$

を用いる．また，後の目的のために，

$$\alpha_j=(\cosh\pi\kappa_j)^{-1}|\rho_j(1)|^2,\quad \alpha_{j,k}=a(k)|\rho_{j,k}(1)|^2 \tag{32.2}$$

とおく．但し，$a(k)$ は (28.5) にある通りである．評価 (27.1) 及び (28.6) から

$$\sum_{\kappa_j \le K} \alpha_j \ll K^2, \quad \sum_{j=1}^{\vartheta(k)} \alpha_{j,k} \ll k \tag{32.3}$$

であることを注意しておく．

さて，Maass 波動 ψ_j を任意にとり，

$$L_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_j(n) n^{-s} \tag{32.4}$$

を ψ_j に対応する「保型 L-函数」という．また，

$$H_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} t_j(n) n^{-s} \tag{32.5}$$

を ψ_j に対応する「Hecke L-函数」という．勿論，$L_j(s) = \rho_j(1) H_j(s)$ である．更に，

$$R_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_j(n)|^2 n^{-s} \tag{32.6}$$

を ψ_j に対応する「Rankin L-函数」という．評価 (31.18) によりこれら右辺は例えば $\mathrm{Re}\, s = \sigma \ge 2$ にて絶対収束し有界であるが，下記の (32.12) から解る様に，このことは $\sigma > 1$ で成立している．函数 $H_j(s)$ あるいは同じことであるが $L_j(s)$ の基本的性質は次の通りである．

【補題 32.1】　函数 $H_j(s)$ は整関数であり，函数等式

$$\begin{aligned} H_j(s) = {} & 2^{2s-1}\pi^{2(s-1)}\Gamma(1-s+i\kappa_j)\Gamma(1-s-i\kappa_j) \\ & \times \{\epsilon_j \cosh(\pi\kappa_j) - \cos(\pi s)\} H_j(1-s) \end{aligned} \tag{32.7}$$

を満たす．これにより，固定された有界領域に止まる s について $\mathrm{Re}\, s$ のみに関係する常数 $c > 0$ があり，$j \ge 1$ について一様に

$$H_j(s) \ll \kappa_j^c. \tag{32.8}$$

また，絶対収束領域において

$$H_j(s) = \prod_p \left(1 - t_j(p)p^{-s} + p^{-2s}\right)^{-1} \tag{32.9}$$

及び

$$H_j(s)H_j(s-\alpha)/\zeta(2s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\alpha(n) t_j(n) n^{-s} \tag{32.10}$$

が成立する．

証明 評価 (32.8) は (31.18)，(32.7) 及び「Phragmén–Lindelöf 凸性定理」からの容易な帰結である．また，関係式 (32.9)–(32.10) は共に (31.14) と同義である．よって，前段のみを示せばよいが，ここではやや複雑な $\epsilon_j = -1$ の場合のみを扱う．このために，

$$\ell_j^-(s) = \int_0^\infty \psi_j^-(iy) y^{s-\frac{3}{2}} dy,$$

$$\psi_j^-(z) = y(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)\psi_j(z)$$

とおく．函数 ψ_j の Γ-保型性と函数 $\gamma(z)$ $(\gamma \in \Gamma)$ についての Cauchy–Riemann 関係式を用いて

$$\psi_j^-(\gamma(z))\frac{d\gamma(z)}{dz} = \psi_j^-(z)\left|\frac{d\gamma(z)}{dz}\right|.$$

特に，$\gamma(z) = -1/z$ として $\psi_j^-(i/y) = -\psi_j^-(iy)$ $(y > 0)$ を得る．従って，

$$\ell_j^-(s) = \int_1^\infty \psi_j^-(iy)\{y^{s-\frac{3}{2}} - y^{-\frac{1}{2}-s}\}dy$$

と書け，$\ell_j^-(s)$ は整関数であり函数等式 $\ell_j^-(1-s) = -\ell_j^-(s)$ を満たす．一方，展開 (18.18) 及び $\psi_j(iy) \equiv 0$ $(y > 0)$ から

$$\psi_j^-(iy) = 4\pi i y^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n\rho_j(n) K_{i\kappa_j}(2\pi n y)$$

である故，

$$\ell_j^-(s) = i\rho_j(1)\pi^{-s}\Gamma(\tfrac{1}{2}(1+s+i\kappa_j))\Gamma(\tfrac{1}{2}(1+s-i\kappa_j))H_j(s).$$

これらをまとめ，(1.18) に注意して (32.7) ($\epsilon_j = -1$) を得る．

Rankin L-函数の基本性質述べるために

$$R_j^*(s) = (2\pi^2)^{-s}\zeta(2s)\Gamma(s;\kappa_j)R_j(s)$$

とおく．但し，$\Gamma(s;\kappa_j) = \Gamma(\frac{1}{2}s)^2\Gamma(\frac{1}{2}s + i\kappa_j)\Gamma(\frac{1}{2}s - i\kappa_j)$ である．

【補題 32.2】 函数 $R_j(s)$ は有理型函数として全複素平面に接続され，函数等式

$$R_j^*(s) = R_j^*(1-s) \tag{32.11}$$

を満たす．

証明 先ず，

$$V_j(s) = \int_{\mathcal{F}} |\psi_j(z)|^2 E(z,s) d\mu(z)$$

とおく．但し，変数 s は Eisenstein 級数 $E(z,s)$ の特異点ではないものとする．展開 (17.14) によりこれら特異点は z の位置とは無関係である．函数 $\psi_j(z)$ は z が尖点に向かうとき指数函数的に減少する故，積分は絶対収束する．従って，$V_j(s)$ は有理型函数であり，特に半平面 $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{1}{2}$ では $s=1$ における一位の極を除いて，正則である．この極の留数は

$$\int_{\mathcal{F}} \{E(z,s) \text{ の } s=1 \text{ における留数}\} \times |\psi_j(z)|^2 d\mu(z) = 3\pi^{-1}.$$

また，(17.16) により

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)V_j(s) = \pi^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2(1-s))V_j(1-s).$$

一方，(26.8) と同様にして仮定 $\mathrm{Re}\, s > 1$ のもとに

$$V_j(s) = \int_0^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\psi_j(x+iy)|^2 y^{s-2} dx dy.$$

つまり，

$$V_j(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_j(n)|^2 \int_0^{\infty} K_{i\kappa}(2\pi n y)^2 y^{s-1} dy$$

$$= 2(2\pi)^{-s}R_j(s)\int_0^\infty K_{i\kappa}(y)^2 y^{s-1}dy. \tag{32.12}$$

しかるに，仮定 $\mathrm{Re}\,s > |\mathrm{Re}\,\mu| + |\mathrm{Re}\,\nu|$ のもとに

$$\int_0^\infty K_\mu(x)K_\nu(x)(x/2)^{s-1}dx = \frac{1}{4}\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\mu+\nu))\Gamma(\tfrac{1}{2}(s+\mu-\nu)) \times \Gamma(\tfrac{1}{2}(s-\mu+\nu))\Gamma(\tfrac{1}{2}(s-\mu-\nu))/\Gamma(s). \tag{32.13}$$

これらをまとめて，(32.11) を得る．

正則尖点形式 $\psi_{j,k}$ に対応してもやはり Hecke L-函数を

$$H_{j,k}(s) = \sum_{n=1}^\infty t_{j,k}(n)n^{-s}.$$

にて定義する．次の事実の証明は容易である故，省略する．

【補題 32.3】 函数 $H_{j,k}(s)$ は整関数であり，函数等式

$$H_{j,k}(s) = (-1)^k\pi^{2s-1}\frac{\Gamma(k-s+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+s-\frac{1}{2})}H_{j,k}(1-s) \tag{32.14}$$

を満たす．これにより，固定された有界領域に止まる s について $\mathrm{Re}\,s$ のみに関係する常数 $c>0$ があり，$j,k\geq 1$ について一様に

$$H_{j,k}(s) \ll k^c. \tag{32.15}$$

また，絶対収束領域にて

$$H_{j,k}(s) = \prod_p \left(1 - t_{j,k}(p)p^{-s} + p^{-2s}\right)^{-1}$$

及び

$$H_{j,k}(s)H_{j,k}(s-\alpha)/\zeta(2s-\alpha) = \sum_{n=1}^\infty \sigma_\alpha(n)t_{j,k}(n)n^{-s} \tag{32.16}$$

が成立する．

[附記]　以下の議論で必要となる事実は (32.8)，(32.10)，(32.15)，(32.16) のみである．補題 32.2 は Rankin の着想 (32.12) に触れるために示した．上記の三種類の函数等式は重要ではあるが凸性定理を応用するための手段以上には用いられていない．Phragmén–Lindelöf 凸性定理については例えば [18] を見よ．なお，積分 (32.13) の計算は [12, p. 76] にある．

第 III 部

リーマンゼータ函数論の最近の展開

—33—
ζ(s) と Kloosterman 和

以上の準備をもとにゼータ函数の平均値理論に戻り，(13.1) にて導入した $\mathcal{Z}_2(g)$ について考察する.「重み」g は第 13 節の通りとする．本節では，$\mathcal{Z}_2(g)$ を Kloosterman 和の和に還元する．

第 13 節の議論を参考として，

$$\mathcal{J}(u,v,w,z;g)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u+it)\zeta(v+it)\zeta(w-it)\zeta(z-it)g(t)dt$$
$$((u,v,w,z)\in\mathcal{D}_+) \tag{33.1}$$

とおく．但し，

$$\mathcal{D}_+=\left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{C}^4:\ \mathrm{Re}\,z_j>1,\ j=1,2,3,4\right\}.$$

積分路を上方に移動して，函数 $\mathcal{J}$ は領域

$$\mathcal{B}=\{\,(u,v,w,z)\in\mathbb{C}^4\ :\ |u|,\ |v|,\ |w|,\ |z|<E_0\,\} \tag{33.2}$$

にて有理型であることが解る．但し，常数 E_0 は (13.3) におけると同様である．積分路を移動した状態で点 (u,v,w,z) を領域 $\mathcal{D}_-\cap\mathcal{B}$ に制限し，積分路を実軸に復帰させれば，

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u,v,w,z;g)&=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u+it)\zeta(v+it)\zeta(w-it)\zeta(z-it)g(t)dt\\&+2\pi\zeta(v-u+1)\zeta(u+w-1)\zeta(u+z-1)g((u-1)i)\\&+2\pi\zeta(u-v+1)\zeta(v+w-1)\zeta(v+z-1)g((v-1)i)\\&+2\pi\zeta(z-w+1)\zeta(u+w-1)\zeta(v+w-1)g((1-w)i)\\&+2\pi\zeta(w-z+1)\zeta(u+z-1)\zeta(v+z-1)g((1-z)i)\end{aligned}$$

を得る．特に，点

$$(u,v,w,z)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=P_{\frac{1}{2}}$$

において函数 $\mathcal{J}$ は正則であり，(1.13)，(3.3)，(3.7) を参照して

$$\mathcal{Z}_2(g) = \mathcal{J}(P_{\frac{1}{2}}; g) - 2\pi \mathrm{Re}\,\{(c_E - \log(2\pi))g(\tfrac{1}{2}i) + \tfrac{1}{2}ig'(\tfrac{1}{2}i)\}. \tag{33.3}$$

これは等式 (13.6) に対応する．

一方，領域 $\mathcal{D}_+$ においては

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u,v,w,z;g) &= \sum_{k,l,m,n=1}^{\infty} k^{-u}l^{-v}m^{-w}n^{-z}\hat{g}(\log(mn)/(kl)) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{u-v}(m)\sigma_{w-z}(n)}{m^u n^w}\hat{g}(\log(n/m)).\end{aligned}$$

但し，函数 $\hat{g}$ は (13.8) にて定義されている．そこで，(13.7) にならい Atkinson 分割を適用し

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}(u,v,w,z;g) \\ &\quad= \mathcal{J}_0(u,v,w,z;g) + \mathcal{J}_1(u,v,w,z;g) + \overline{\mathcal{J}_1(\overline{w},\overline{z},\overline{u},\overline{v};g)}.\end{aligned} \tag{33.4}$$

但し，$\mathcal{J}_0$，$\mathcal{J}_1$ は各々 $m=n$，$m<n$ なる部分に対応する．Ramanujan 等式 (1.8) により，

$$\mathcal{J}_0(u,v,w,z;g) = \frac{\zeta(u+w)\zeta(u+z)\zeta(v+w)\zeta(v+z)}{\zeta(u+v+w+z)}\hat{g}(0). \tag{33.5}$$

言うまでもなく，函数 $\mathcal{J}_0$ は $\mathbb{C}^4$ 上の有理型函数である．函数 $\mathcal{J}_1$ については (13.13) を用いて，

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}_1(u,v,w,z;g) \\ &\quad= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{u-v}(m)\sigma_{w-z}(m+n)}{m^u(m+n)^w}\hat{g}(\log(1+n/m)) \\ &\quad= \frac{1}{2\pi i}\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{u-v}(m)\sigma_{w-z}(m+n)}{m^{u+w}}\int_{(2)} \tilde{g}(s,w)(m/n)^s ds.\end{aligned} \tag{33.6}$$

しかし，これ以降は第 13 節の議論を辿ることはできない．例えば (13.14) に対応する表示を積分路を単純に移動しても得られないのである．勿論，原因は因子 $\sigma_{u-v}(m)\sigma_{w-z}(m+n)$ の存在，特に $\sigma_{w-z}(m+n)$ にある．つまり，変数 m,n を分離せねば先に進むことは困難である．この「変数分離」は着想 (16.4) を応用し

て成すべきであるが，ここでは Ramanujan 表示 (1.7) を用いて議論の簡易化を計る．問題の特殊な状況を利用する訳である．分解 (16.4) からの直接の議論は読者に委ねるが，Eisenstein 級数の展開式 (17.14) と (1.7) との関連を想起すれば，以下の議論は (16.4) の一変形の応用であることが看てとれよう．

先ず，絶対収束性を確保するために，領域

$$\mathcal{D}_{+,0} = \{(u,v,w,z;g) \in \mathcal{D}_+ : \mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, w + 1 > 3\}.$$

に制限して考察を行う．このとき，(1.7) と (33.6) から

$$\mathcal{J}_1(u,v,w,z;g) = \zeta(z-w+1)\sum_{l=1}^{\infty} l^{w-z-1}$$
$$\times \sum_{\substack{h=1\\(h,l)=1}}^{l} \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} D(u+w-s, u-v; e(h/l))\zeta(s;e(h/l))\tilde{g}(s,w)ds. \quad (33.7)$$

但し，

$$\zeta(s;e(h/l)) = \sum_{n=1}^{\infty} e(nh/l)n^{-s},$$
$$D(s,\xi;e(h/l)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\xi(n)e(nh/l)n^{-s} \quad ((h,l)=1).$$

積分路を移動するのであるが，その前に函数 D の基本的な性質を挙げる必要がある．

【補題 33.1】　函数 $D(s,\xi;e(h/l))$ は $\mathbb{C}^2$ 上で有理型である．変数 s の函数としては，$\xi \neq 0$ の場合，二点 $s = 1, 1+\xi$ において一位の極をもち，留数は各々 $l^{\xi-1}\zeta(1-\xi)$，$l^{-\xi-1}\zeta(1+\xi)$ である．他所では正則であり，函数等式

$$D(s,\xi;e(h/l)) = 2(2\pi)^{2s-\xi-2} l^{\xi-2s+1}\Gamma(1-s)\Gamma(1+\xi-s)$$
$$\times \{D(1-s,-\xi;e(\bar{h}/l))\cos(\tfrac{1}{2}\pi\xi)$$
$$- D(1-s,-\xi;e(-\bar{h}/l))\cos(\pi(s-\tfrac{1}{2}\xi))\} \quad (33.8)$$

を満たす．但し，$h\bar{h} \equiv 1 \bmod l$ である．更に，ξ は有界な領域に止まり，$\sigma =$

Re s も有界であるとき，評価

$$D(s,\xi;e(h/l)) \ll \begin{cases} (\log|s|)^2 & (a(\xi)<\sigma), \\ (l|s|)^{a(\xi)-\sigma}(\log|s|)^2 & (b(\xi)\le\sigma\le a(\xi)), \\ (l|s|)^{a(\xi)-2\sigma}(\log|s|)^2 & (\sigma<b(\xi)) \end{cases} \tag{33.9}$$

が成立する．但し，

$$a(\xi)=1+\tfrac{1}{2}(|\mathrm{Re}\,(\xi)|+\mathrm{Re}\,(\xi)),\quad b(\xi)=-\tfrac{1}{2}(|\mathrm{Re}\,(\xi)|-\mathrm{Re}\,(\xi)).$$

証明　評価式は函数等式と「Phragmén–Lindelöf 凸性定理」から容易に従う．その他については等式

$$D(s,\xi;e(h/l))=l^{\xi-2s}\sum_{a,b=1}^{l} e(abh/l)\zeta(s,a/l)\zeta(s-\xi,b/l) \tag{33.10}$$

を用いて示す．但し，

$$\zeta(s,a)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n+a>0}}^{\infty}(n+a)^{-s}\quad (\mathrm{Re}\,s>1;\ a\in\mathbb{R})$$

は「Hurwitz ゼータ函数」である．この函数は全複素平面に接続され，点 $s=1$ で留数 1 の一位の極をもつ以外では正則であり，函数等式

$$\zeta(s,a)=2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}\sin(\tfrac{1}{2}\pi s+2n\pi a)\qquad(\mathrm{Re}\,s<0) \tag{33.11}$$

を満たす．これらの事実を (33.10) に挿入し補題の前段を得る．

等式 (33.7) に戻り，積分路を移動するが，そのために領域

$$\begin{aligned}\mathcal{E}=\{(u,v,w,z)\in\mathcal{B}:\ &\mathrm{Re}\,(u+w)<\tfrac{1}{3}E_0,\\ &\mathrm{Re}\,(v+w)<\tfrac{1}{3}E_0,\mathrm{Re}\,(u+v+w+z)>3E_0\}\end{aligned} \tag{33.12}$$

を用意する．明らかに $\mathcal{D}_{+,0}\cap\mathcal{E}\neq\emptyset$ であるが，臨時にこの共通領域で議論する．

このとき，補題 13.1 及び 33.1 により

$$\sum_{\substack{h=1\\(h,l)=1}}^{l} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(2)} - \int_{(E_0)}\right\} D(u+w-s, u-v; e(h/l))\zeta(s; e(h/l))\tilde{g}(s,w)ds$$

$$= l^{u-v-1}\zeta(v-u+1)\tilde{g}(u+w-1,w)\sum_{n=1}^{\infty} c_l(n) n^{1-u-w}$$

$$+ l^{v-u-1}\zeta(u-v+1)\tilde{g}(v+w-1,w)\sum_{n=1}^{\infty} c_l(n) n^{1-v-w}. \tag{33.13}$$

但し，便宜上 $u \neq v$ と仮定する．また，$c_l(n)$ は Ramanujan 和である．垂直線 (E_0) 上では $\mathrm{Re}\,(u+w-s) < 0$, $\mathrm{Re}\,(v+w-s) < 0$ である故，因子 $D(u+w-s, u-v; e(h/l))$ に函数等式 (33.8) を応用し，

$$\sum_{\substack{h=1\\(h,l)=1}}^{l} \frac{1}{2\pi i}\int_{(E_0)} D(u+w-s, u-v; e(h/l))\zeta(s; e(h/l))\tilde{g}(s,w)ds$$

$$= 2(2\pi)^{w-z-1} l^{z-w} \sum_{m,n=1}^{\infty} m^{\frac{1}{2}(1-u-v-w-z)} n^{\frac{1}{2}(u+w-v-z-1)} \sigma_{v-u}(n)$$

$$\times \left\{ S(m,n;l)\varphi_+\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}; u,v,w,z;g\right)\right.$$

$$\left. + S(m,-n;l)\varphi_-\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}; u,v,w,z;g\right)\right\}. \tag{33.14}$$

但し，

$$\varphi_+(x;u,v,w,z;g) = \frac{1}{2\pi i}\cos\left(\tfrac{1}{2}(u-v)\pi\right)\int_{(E_0)} \left(\frac{x}{2}\right)^{u+v+w+z-1-2s}$$

$$\times \Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds, \tag{33.15}$$

$$\varphi_-(x;u,v,w,z;g) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(E_0)} \left(\frac{x}{2}\right)^{u+v+w+z-1-2s} \cos\left(\pi\left(w+\tfrac{1}{2}(u+v)-s\right)\right)$$

$$\times \Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds. \tag{33.16}$$

等式 (33.7), (33.13)–(33.14) をまとめ (1.7) を用いて，次の結果を得る．

【補題 33.2】 函数 $\mathcal{J}_1(u,v,w,z;g)$ は領域 $\mathcal{E}$ に有理型函数として接続され,

$$\mathcal{J}_1(u,v,w,z;g)=\{\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3^{+}+\mathcal{J}_3^{-}\}(u,v,w,z;g) \tag{33.17}$$

と分解される. 但し,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2(u,v,w,z;g)&=\tilde{g}(u+w-1)\zeta(v+z)\zeta(u+w-1)\\&\quad\times\zeta(z-w+1)\zeta(v-u+1)/\zeta(v+z-u-w+2)\\&+\tilde{g}(v+w-1)\zeta(u+z)\zeta(v+w-1)\\&\quad\times\zeta(z-w+1)\zeta(u-v+1)/\zeta(u+z-v-w+2),\end{aligned} \tag{33.18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_3^{\pm}(u,v,w,z;g)&=2(2\pi)^{w-z-1}\zeta(z-w+1)\\&\quad\times\sum_{m,n=1}^{\infty}m^{\frac{1}{2}(1-u-v-w-z)}n^{\frac{1}{2}(u+w-v-z-1)}\\&\quad\times\sigma_{v-u}(n)K_{\pm}(m,n;u,v,w,z;g).\end{aligned} \tag{33.19}$$

ここに,

$$K_{\pm}(m,n;u,v,w,z;g)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,\pm n;l)\varphi_{\pm}\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn};u,v,w,z;g\right). \tag{33.20}$$

[附記] 本節については [12, pp. 153–158] を参照せよ. 函数等式 (33.11) の証明は定理 1.1 と同様にして行えるが, 別証明については例えば [17, pp. 36–37] を見よ. あるいは, 表示

$$\zeta(s,a)-a^{-s}=\frac{1}{2\pi i\Gamma(s)}\int_{(\alpha)}\Gamma(w)\Gamma(s-w)\zeta(w)a^{w-s}dw$$

$$(\operatorname{Re}s>\alpha>1;0<a\leq 1)$$

から導くこともできる. 補題 33.1 は Hecke–Estermann による. Kloosterman 和の「かけら」が現われている.

—34—
変数分離

本節では和 $K_\pm(m,n;u,v,w,z;g)$ に Kuznetsov 和公式を応用し，前節で問題とした m,n の分離を成す．

先ず，K_+ に (29.7) を応用する．勿論，$(u,v,w,z)\in\mathcal{E}$ を前提として議論する．函数 φ_+ が条件 (29.6) を満たすことは殆ど自明である故，(32.1)–(32.2) に注意して

$$K_+(m,n;\,u,v,w,z;g)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j t_j(m)t_j(n)(\varphi_+)^+(\kappa_j;u,v,w,z;g)$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}(\varphi_+)^+(r;u,v,w,z;g)dr$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\vartheta(k)}\alpha_{j,k}t_{j,k}(m)t_{j,k}(n)(\varphi_+)^+((\tfrac{1}{2}-k)i;u,v,w,z;g). \tag{34.1}$$

但し，

$$(\varphi_+)^+(r;u,v,w,z;g)$$
$$=\frac{\pi i}{2\sinh(\pi r)}\int_0^\infty (J_{2ir}(x)-J_{-2ir}(x))\varphi_+(x;u,v,w,z;g)\frac{dx}{x}.$$

実数 r について，この積分を変形するために二重積分

$$\int_0^\infty J_{2ir}(x)\int_{(E_0)}\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)$$
$$\times\tilde{g}(s,w)\left(\frac{x}{2}\right)^{u+v+w+z-2-2s}dsdx \tag{34.2}$$

の収束性について考察する．評価

$$J_{2ir}(x)\ll\begin{cases}1 & (x\to+0),\\ x^{-\frac{1}{2}} & (x\to+\infty)\end{cases} \tag{34.3}$$

を用いれば，(34.2) は $\mathcal{E}$ を含む領域

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(u+w) < E_0+1,\ \mathrm{Re}\,(v+w) < E_0+1, \\ 2E_0+1 < \mathrm{Re}\,(u+v+w+z) < \frac{2}{3}E+\frac{3}{2} \end{cases} \tag{34.4}$$

において正則であることが解る．実際，(34.2) を $0 \le x < 1$，$x \ge 1$ に従って分割すれば，前者の部分は明らかに (34.4) で正則である．後者の部分では s-積分の積分路を $\mathrm{Re}\,s = \frac{1}{3}E$ に移動すればよい．次に，$2E_0+1 < \mathrm{Re}\,(u+v+w+z) < 2E_0+\frac{3}{2}$ を満たす (34.4) の部分領域では (34.2) は絶対収束であり，

$$\int_{(E_0)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)-s+ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)+s+ir)} \times \Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds \tag{34.5}$$

に等しいことに注意する．ここで，(27.18) の逆変換に相当する

$$\int_0^\infty J_\nu(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1-\mu))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1+\mu))} \quad (\mathrm{Re}\,\mu > \tfrac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,(\nu-\mu) > -1) \tag{34.6}$$

を用いた．積分 (34.5) は領域 (34.4) において明らかに正則である．つまり，解析接続により (34.4) 全域で (34.2) は (34.5) に等しい．これらをまとめ，領域 $\mathcal{E}$ において

$$\begin{aligned} &(\varphi_+)^+(r;\,u,v,w,z;g) \\ &= \frac{1}{4\pi i}\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))\int_{(E_0)} \sin(\tfrac{1}{2}\pi(u+v+w+z-2s)) \\ &\times\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+ir-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+ir-s) \\ &\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds. \end{aligned} \tag{34.7}$$

整数 $k \ge 1$ について $r = (\frac{1}{2}-k)i$ となる場合も同様に議論でき，(34.7) が成立するが，やや変形して

$$(\varphi_+)^+((\tfrac{1}{2}-k)i;u,v,w,z;g)$$

$$= \frac{(-1)^k}{4i}\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))\int_{(E_0)}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2}(u+v+w+z-2)-s)}{\Gamma(k+\frac{1}{2}(2-u-v-w-z)+s)}$$
$$\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds \qquad (34.8)$$

を得る．

次に，和 K_- について簡単に述べる．函数 φ_- は条件 (29.6) を満たすが，その確かめには，φ_+ の場合と異なり評価 (13.11) が本質的に必要となる．和公式 (30.11) により，$(u,v,w,z)\in\mathcal{E}$ について

$$K_-(m,n;u,v,w,z;g) = \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\alpha_j t_j(m)t_j(n)(\varphi_-)^-(\kappa_j;u,v,w,z;g)$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}(\varphi_-)^-(r;u,v,w,z;g)dr. \qquad (34.9)$$

但し，

$$(\varphi_-)^-(r;u,v,w,z;g) = 2\cosh(\pi r)\int_0^{\infty}\varphi_-(r;u,v,w,z;g)K_{2ir}(x)\frac{dx}{x}.$$

右辺に (33.6) を挿入し二重積分を得るが，その絶対収束性の確認は容易である．積分公式 (30.2) の逆変換に相当する

$$\int_0^{\infty}K_{2\nu}(x)(x/2)^{2s-1}dx = \frac{1}{2}\Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu) \quad (\mathrm{Re}\, s > |\mathrm{Re}\,\nu|) \qquad (34.10)$$

を用いて，

$$(\varphi_-)^-(r;u,v,w,z;g)$$
$$= -\frac{1}{4\pi i}\cosh(\pi r)\int_{(E_0)}\cos(\pi(w+\tfrac{1}{2}(u+v)-s))$$
$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+ir-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-ir-s)$$
$$\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds. \qquad (34.11)$$

[附記] 本節については [12, pp. 158–162] を参照せよ．積分公式 (34.10) は表示式 (17.19) から容易に従うが，(34.6) についてはやや工夫が必要である．評価 (34.3) も含めて [12, pp. 183–184] を見よ．

—35—
結晶作用

本節では，スペクトル分解式 (34.1) 及び (34.9) を (33.19) に挿入し Hecke L-函数の出現を見る．

議論を多少見通し良くすることと後の目的のために，$\mathbb{C}^5$ 上の函数 $\Phi_\pm$，Ξ を次の如く定義する．

$$\begin{aligned}&\Phi_+(\xi;\, u,v,w,z;g)\\&= -i(2\pi)^{w-z-2}\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))\int_{-i\infty}^{i\infty}\sin(\tfrac{1}{2}\pi(u+v+w+z-2s))\\&\times\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-\xi-s)\\&\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds,\end{aligned}\tag{35.1}$$

$$\begin{aligned}&\Phi_-(\xi;\, u,v,w,z;g)\\&= i(2\pi)^{w-z-2}\cos(\pi\xi)\int_{-i\infty}^{i\infty}\cos(\pi(w+\tfrac{1}{2}(u+v)-s))\\&\times\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-\xi-s)\\&\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds,\end{aligned}\tag{35.2}$$

$$\begin{aligned}\Xi(\xi;u,v,w,z;g) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)-s)}{\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)+s)}\\&\quad\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds.\end{aligned}\tag{35.3}$$

但し，(35.1) においては積分路は $-i\infty$ から $+i\infty$ に向かう曲線であり，函数

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{1}{2}\pi(u+v+w+z-2s))&\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi-s)\\&\times\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-\xi-s)\end{aligned}$$

及び

$$\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)$$

の各々の特異点を左右に分離するものである．勿論，(ξ,u,v,w,z) はその様な曲線が描ける位置にあるものと仮定する．定義 (35.2)–(35.3) における積分路も同様である．

【補題 35.1】 上記の定義のもとに

$$\Phi_+(\xi;u,v,w,z;g) = -\frac{(2\pi)^{w-z}\cos\left(\frac{1}{2}\pi(u-v)\right)}{4\sin(\pi\xi)} \times \{\Xi(\xi;u,v,w,z;g) - \Xi(-\xi;u,v,w,z;g)\}, \tag{35.4}$$

$$\Phi_-(\xi;u,v,w,z;g) = \frac{(2\pi)^{w-z}}{4\sin(\pi\xi)}\{\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)+\xi))\Xi(\xi;u,v,w,z;g) - \sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)-\xi))\Xi(-\xi;u,v,w,z;g)\}. \tag{35.5}$$

勿論，これら左辺は意味あるものと仮定する．また，実数 r と $(u,v,w,z)\in\mathcal{E}$ については

$$(\varphi_+)^+(r;u,v,w,z;g) = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{1-w+z}\Phi_+(ir;u,v,w,z;g), \tag{35.6}$$

$$(\varphi_-)^-(r;u,v,w,z;g) = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{1-w+z}\Phi_-(ir;u,v,w,z;g). \tag{35.7}$$

更に，整数 $k\ge 1$ と $(u,v,w,z)\in\mathcal{E}$ については

$$(\varphi_+)^+(i(\tfrac{1}{2}-k);u,v,w,z;g) = \tfrac{1}{2}(-1)^k\pi\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))\Xi(k-\tfrac{1}{2};u,v,w,z;g). \tag{35.8}$$

証明　前段については等式 (35.5) のみを証明する．等式 (35.4) は同様に議論できる．点 (ξ,u,v,w,z) は Φ_- が意味をもつものであるならば，$\Xi(\pm\xi;u,v,w,z;g)$ もまた意味をもつ．何故ならば，定義式 (35.2) における積分路は (35.3) において，ξ の符号を変えても変えなくとも，そのまま積分路として用いることができるから

である．そこでこの様に積分路を定めたとき，(35.5) の $\{\cdots\}$ 部分は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\Big[\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)+\xi))\frac{\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)-s)}{\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)+s)}$$

$$-\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)-\xi))\frac{\Gamma(-\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)-s)}{\Gamma(-\xi+\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)+s)}\Big]$$

$$\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)\tilde{g}(s,w)ds.$$

に等しい．更に，この $[\cdots]$ 部分は函数等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin(\pi s)$ により

$$\pi^{-1}\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-\xi-s)$$

$$\times\Big\{\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)+\xi))\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-\xi-s))$$

$$-\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)-\xi))\sin(\pi(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi-s))\Big\}$$

と変形される．これより (35.5) が直ちに従う．等式 (35.6)–(35.8) の証明は容易である故，省略する．

さて，(34.1)，(34.9) を実際に (33.19) に挿入し和の順序を交換するが，必要となる絶対収束性は変数 m,n については (31.18)，(31.22) 及び $(u,v,w,z)\in\mathcal{E}$ より明白である．従って，問題は函数 $(\varphi_\pm)^\pm$ の評価となり，これは補題 35.1 により函数 Ξ の評価に帰着される．そこで，$\mathcal{E}$ 内の固定された任意の有界閉集合上で一様な評価

$$\Xi(ir;u,v,w,z;g)\ll|r|^{-\frac{1}{4}E},\quad \Xi(k-\tfrac{1}{2};u,v,w,z;g)\ll k^{-\frac{1}{4}E} \tag{35.9}$$

が成立することを示そう．勿論，実数 r，整数 $k\geq 1$ は充分大である．一方，後者を示すには，例えば $k>E$ と仮定した上で，積分路 $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{4}E$ をとれば済む．前者を示すには，定義 (34.3) において初めに $\mathrm{Re}\,s=E_0$ を積分路とし，それを折線 $[E_0-i\infty,\ E_0-\frac{1}{2}|r|i,\ \ \frac{1}{3}E-\frac{1}{2}|r|i,\ \frac{1}{3}E+\frac{1}{2}|r|i,\ E_0+\frac{1}{2}|r|i,\ \ E_0+i\infty]$ に移動する．いま，前提とした $\mathcal{E}$ の有界閉集合によって定まる一定値よりも $|r|$ を充分大きくとれば，この操作によって積分 (34.3) の値は変化しない．この積分路上で，(10.14) 及び (13.11) を用いて被積分函数を評価すればよい．

以上をまとめ，(32.3) に注意し，等式 (1.8)，(32.10)，(32.16) を用いて和 $\mathcal{J}_3^\pm$ の

スペクトル分解を得る.

【補題 35.2】 領域 $\mathcal{E}$ において,

$$\mathcal{J}_3^+(u,v,w,z;g) = \mathcal{J}_{3,c}^+(u,v,w,z;g) + \mathcal{J}_{3,d}^+(u,v,w,z;g) + \mathcal{J}_{3,h}^+(u,v,w,z;g). \tag{35.10}$$

ここに,

$$\mathcal{J}_{3,c}^+(u,v,w,z;g) = \frac{1}{i\pi}\int_{(0)} \frac{S(\xi;u,v,w,z)}{\zeta(1+2\xi)\zeta(1-2\xi)}\Phi_+(\xi;u,v,w,z;g)d\xi, \tag{35.11}$$

$$\begin{aligned} &S(\xi;u,v,w,z) \\ &= \zeta(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi)\zeta(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1)-\xi) \\ &\times\zeta(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w+1)+\xi)\zeta(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w+1)-\xi) \\ &\times\zeta(\tfrac{1}{2}(v+z-u-w+1)+\xi)\zeta(\tfrac{1}{2}(v+z-u-w+1)-\xi). \end{aligned} \tag{35.12}$$

且つ

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{3,d}^+(u,v,w,z;g) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j H_j(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1))H_j(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w+1)) \\ &\times H_j(\tfrac{1}{2}(v+z-u-w+1))\Phi_+(i\kappa_j;u,v,w,z;g), \end{aligned} \tag{35.13}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{3,h}^+(u,v,w,z;g) = (2\pi)^{w-z}\cos(\tfrac{1}{2}(u-v))\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{j=1}^{\vartheta(k)}(-1)^k\alpha_{j,k} \\ &\times H_{j,k}(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1))H_{j,k}(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w+1)) \\ &\times H_{j,k}(\tfrac{1}{2}(v+z-u-w+1))\Xi(k-\tfrac{1}{2};u,v,w,z;g). \end{aligned} \tag{35.14}$$

【補題 35.3】 領域 $\mathcal{E}$ において,

$$\mathcal{J}_3^-(u,v,w,z;g) = \mathcal{J}_{3,c}^-(u,v,w,z;g) + \mathcal{J}_{3,d}^-(u,v,w,z;g). \tag{35.15}$$

但し,

$$\mathcal{J}_{3,c}^{-}(u,v,w,z;g)=\frac{1}{i\pi}\int_{(0)}\frac{S(\xi;u,v,w,z)}{\zeta(1+2\xi)\zeta(1-2\xi)}\Phi_{-}(\xi;u,v,w,z;g)d\xi, \quad (35.16)$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}_{3,d}^{-}(u,v,w,z;g)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\alpha_j H_j(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1))H_j(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w+1))\\&\times H_j(\tfrac{1}{2}(v+z-u-w+1))\Phi_{-}(i\kappa_j;u,v,w,z;g). \quad (35.17)\end{aligned}$$

[附記] 本節については [12, pp. 162–166] を参照せよ．ここで本質的な働きをなしたのは，等式 (32.10)，(32.16) に縮約された Hecke 作用素の乗法性である．自明な関係式

$$(T(n)E)(z,s)=n^{s-\frac{1}{2}}\sigma_{1-2s}(n)E(z,s) \quad (35.18)$$

に注意すれば，Ramanujan 等式 (1.8) もやはりこの乗法性と関係があることが看てとれよう.「非対角部分」が如何に Hecke L-函数に吸収されたか，読者諸氏は検討されたい．

—36—
解 析 接 続

領域 $\mathcal{E}$ は点 $P_{\frac{1}{2}}$ を含先ず，上記スペクトル分解を直接 (33.3) に挿入することはできない．つまり，(35.10) 及び (35.15) を点 $P_{\frac{1}{2}}$ を含む領域に解析接続せねばならない．本節ではその様な領域として (33.2) にて導入された $\mathcal{B}$ をとり得ることを示す．領域 $\mathcal{B}$ は原点対称であり，且つ，議論の出発点であった領域 $\mathcal{D}_{+}$ と共通領域をもつ．従って，分解 (33.4) は $\mathcal{B}$ 全域で成立し $\mathcal{Z}_2(g)$ のスペクトル分解を得ることとなる．

再び補題 35.1 により問題を函数 Ξ に還元し，次の結果を示す．

【補題 36.1】 函数 $\Xi(\xi;u,v,w,z;g)$ は領域

$$\widetilde{\mathcal{B}}=\left\{\xi:\mathrm{Re}\,\xi>-\tfrac{1}{8}E\right\}\times\mathcal{B} \tag{36.1}$$

で有理型である．また，集合 $\mathcal{N}$ は $\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)$，$\xi+\frac{1}{2}(u+z-v-w+1)$，$\xi+\frac{1}{2}(v+z-u-w+1)$ の内いずれか一つが 0 以下の整数に等しいという条件を満たす点 (ξ,u,v,w,z) からなるものとすると，領域 $\mathcal{B}\setminus\mathcal{N}$ において $\Xi(\xi;u,v,w,z;g)$ は正則である．更に，条件 $\mathrm{Re}\,\xi>-\frac{1}{8}E$ を満たしつつ ξ が固定された任意の垂直あるいは水平な帯状領域において無限遠点に向かうとき，$\mathcal{B}$ 上にて一様な評価

$$\Xi(\xi;u,v,w,z;g)\ll|\xi|^{-\frac{1}{4}E} \tag{36.2}$$

が成立する．

証明 先ず，$\mathcal{N}^*=\left[\{\xi:\mathrm{Re}\,\xi>-\frac{1}{4}E\}\times\mathcal{B}\right]\setminus\mathcal{N}$ と置けば，これは弧状連結な開集合である．いま $(\xi,u,v,w,z)\in\mathcal{N}^*$ であれば，補題 13.1 に注意して，定義 (35.3) にて必要となる曲線を垂直帯 $|\mathrm{Re}\,s|\le\frac{1}{3}E$ 内に描くことができる．つまり，函数 Ξ は領域 $\mathcal{N}^*$ の各点で意味をもち，且つ一価である．即ち，$\mathcal{N}^*$ の任意の点から出発して函数 Ξ を $\mathcal{N}^*$ の他の任意の点に解析接続でき，しかもその結果は常に (35.3) にて表示される．

次に，領域

$$\{(\xi,u,v,w,z):\mathrm{Re}\,\xi>0,\,(u,v,w,z)\in\mathcal{E}\}$$

に制限して議論を進める．これは $\mathcal{N}^*$ に含まれ，その各点で垂直線 $\mathrm{Re}\,s=E_0$ を用いて Ξ は定義できる．この積分路を固定し，(13.9) を (35.3) に挿入すると，得られた二重積分は自明な評価 $\hat{g}(\log(1+y))\ll(1+y)^{-E}$ $(y>0)$ により絶対収束である．積分の順序を交換し，

$$\Xi(\xi;u,v,w,z;g)$$
$$=\int_0^\infty y^{-1}(1+y)^{-w}\hat{g}(\log(1+y))G(y;\xi;u,v,w,z)dy. \tag{36.3}$$

但し,

$$G(y;\xi;u,v,w,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(E_0)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)+\xi-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)+\xi+s)}$$
$$\times\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(s+1-v-w)y^s ds.$$

超幾何函数 F を用いて

$$G(y;\xi;u,v,w,z)$$
$$=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)^{-1}F(\alpha,\beta;\gamma;-y)y^{\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)}. \tag{36.4}$$

但し, $\alpha=\xi+\frac{1}{2}(u+z-v-w+1)$, $\beta=\xi+\frac{1}{2}(v+z-u-w+1)$, $\gamma=1+2\xi$ である. 従って,

$$G(y;\xi;u,v,w,z)=\frac{\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(v+z-u-w+1))}{\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(v+w-u-z+1))}y^{\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-1)}$$
$$\times\int_0^1 x^{\xi+\frac{1}{2}(u+z-v-w-1)}(1-x)^{\xi+\frac{1}{2}(v+w-u-z-1)}$$
$$\times(1+xy)^{-\xi+\frac{1}{2}(u+w-v-z-1)}dx.$$

この最後の因子に二項展開を用いて, 以上をまとめ

$$\Xi(\xi;u,v,w,z)=$$
$$\sum_{j=0}^{P-1}(-1)^j\frac{\Gamma(j+\xi+\frac{1}{2}(u+z-v-w+1))\Gamma(j+\xi+\frac{1}{2}(v+z-u-w+1))}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+1+2\xi)}$$
$$\times\tilde{g}(j+\xi+\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-1),w)+(-1)^P\frac{\Gamma(P+\xi+\frac{1}{2}(v+z-u-w+1))}{\Gamma(P)\Gamma(\xi+\frac{1}{2}(v+w-u-z+1))}$$
$$\times\int_0^1(1-x)^{\xi+\frac{1}{2}(v+w-u-z-1)}R_P(x;\xi;u,v,w,z)dx \tag{36.5}$$

を得る. 但し, 整数 $P\geq 0$ は任意であり,

$$R_P(x;\xi;u,v,w,z)=$$
$$x^{P+\xi+\frac{1}{2}(u+z-v-w-1)}\int_0^1\int_0^\infty(1-\theta)^{P-1}y^{P+\xi+\frac{1}{2}(u+v+w+z-3)}$$
$$\times(1+xy\theta)^{-P-\xi+\frac{1}{2}(u+w-v-z-1)}(1+y)^{-w}\hat{g}(\log(1+y))dyd\theta.$$

表示 (36.5) により函数 Ξ は領域

$$\{(\xi,u,v,w,z) : |\mathrm{Re}\,\xi| < \tfrac{1}{8}E,\\ \max[\,|\mathrm{Re}\,u|,\,|\mathrm{Re}\,v|,\,|\mathrm{Re}\,w|,\,|\mathrm{Re}\,z|\,] < \tfrac{1}{24}E\}.$$

で有理型である．実際，(36.5) の積分において部分積分を $[\frac{1}{4}E]$ 回繰り返せば，得られる積分はこの領域で正則である．一方，仮定 $\mathrm{Re}\,\xi \geq \frac{1}{8}E$ のもとでは，任意の $(u,v,w,z) \in \mathcal{B}$ について定義 (35.3) の積分路を $\mathrm{Re}\,s = E_0$ ととることができる．以上で補題の前段を得たこととなる．なお，評価 (36.2) は (35.9) と同様に証明できる故，詳細は省く．

【補題 36.2】　領域 $\mathcal{B}$ にて函数 $\mathcal{J}_1(u,v,w,z)$ は有理型である．即ち，分解 (33.4) は $\mathcal{B}$ 全域で成立している．

証明　補題 32.1, 32.3, 35.1–35.3, 36.1 及び 評価 (32.3) により $\mathcal{J}_{3,d}^{\pm}$, $\mathcal{J}_{3,h}^{+}$ は $\mathcal{B}$ において明らかに有理型である．そこで，$\mathcal{J}_{3,c}^{\pm}$ についてのみ考察すればよい．このために

$$\mathcal{J}_{3,c}(u,v,w,z) = \{\mathcal{J}_{3,c}^{+} + \mathcal{J}_{3,c}^{-}\}(u,v,w,z)$$

とおく．等式 (35.4)–(35.5) により，領域 $\mathcal{E}$ にて

$$\mathcal{J}_{3,c}(u,v,w,z;g) = i(2\pi)^{w-z-1}\int_{(0)} \frac{S(\xi;u,v,w,z)}{\sin(\pi\xi)\zeta(1+2\xi)\zeta(1-2\xi)}\\ \times\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v)) - \sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)+\xi))\}\Xi(\xi;u,v,w,z;g)d\xi \tag{36.6}$$

であるが，$\zeta(1-2\xi)$ に函数等式 (1.15) を応用し

$$\mathcal{J}_{3,c}(u,v,w,z;g)\\ = 2i(2\pi)^{w-z-2}\int_{(0)}(2\pi)^{2\xi}\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v)) - \sin(\pi(\tfrac{1}{2}(z-w)+\xi))\}\\ \times S(\xi;u,v,w,z)\Gamma(1-2\xi)\{\zeta(2\xi)\zeta(1+2\xi)\}^{-1}\Xi(\xi;u,v,w,z;g)d\xi \tag{36.7}$$

と書ける．この積分路を移動することを目的として条件

$$3E_0 < Q \leq \tfrac{1}{4}E, \quad \zeta(s) \neq 0 \quad (\mathrm{Im}\,s = \pm Q)$$

を満たす Q を定める．積分域 $|\xi| > Q$，$|\xi| \le Q$ に従って $\mathcal{J}_{3,c}$ を二つに分けるが，前者が $\mathcal{B}$ において正則であることは，ゼータ函数の基本性質及び補題 36.1 から容易に解る．後者については，積分路を折線 $L_Q = [-Qi, [Q]+\frac{1}{4}-Qi, [Q]+\frac{1}{4}+Qi, Qi]$ に移動する．仮定 $(u,v,w,z) \in \mathcal{E}$ により Ξ-因子は $\mathrm{Re}\,\xi \ge 0$ で正則である故，関係する特異点は

$$\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-3),\ \tfrac{1}{2}(u+z-v-w-1),\ \tfrac{1}{2}(v+z-u-w-1), \qquad (36.8)$$

$$\tfrac{1}{2}\rho \quad (\,|\mathrm{Im}\,\rho| < Q\,), \quad \tfrac{1}{2}n \quad (\,2 \le n \le [Q]\,) \qquad (36.9)$$

である．ここに，ρ はゼータ函数の複素零点である．はじめの三点は $S(\xi;u,v,w,z)$ から，また (36.9) の各点は $\Gamma(1-2\xi)/\zeta(2\xi)$ から，引き起こされるものである．こうして，

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{3,c}(u,v,w,z;g) = F_-(u,v,w,z;g) &+ U(u,v,w,z;g)\\ &+\mathcal{J}_{3,c}^{(Q)}(u,v,w,z;g)\end{aligned} \qquad (36.10)$$

を得る．但し，F_-，U は各々 (36.8)，(36.9) に対応し，$\mathcal{J}_{3,c}^{(Q)}$ は (36.7) において積分路を $L_Q \cup (-i\infty, -Qi] \cup [Qi, +i\infty)$ に置き換えたものである．補題 36.1 により F_-，U は $\mathcal{B}$ にて有理型であり，$\mathcal{J}_{3,c}^{(Q)}$ は $\mathcal{B}$ にて正則である．

[附記]　本節については [12, pp. 166–171] を参照せよ．補題 36.2 の証明において $\{\zeta(2it)\zeta(1+2it)\}^{-1}$ $(t \le -Q, t \ge Q)$ の評価が必要であるが，(4.13) 及び函数等式を用いれば済む．補題 36.1 の証明は冗長であるが，慎重を期したものである．

—37—
予 定 調 和

議論の終段である．残るは補題 32.2 にて特殊化 $(u,v,w,z) = P_{\frac{1}{2}}$ を行うのみで

ある．

【定理 37.1】 函数 g 及び変換 $\mathcal{Z}_2(g)$ は第 13 節にある通りとする．このとき，スペクトル分解

$$\mathcal{Z}_2(g) = \left\{\mathcal{Z}_{2,r} + \mathcal{Z}_{2,d} + \mathcal{Z}_{2,c} + \mathcal{Z}_{2,h}\right\}(g) \tag{37.1}$$

が成立する．ここに，

$$\mathcal{Z}_{2,r}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{a,b,k,l\ge 0\\ ak+bl\le 4}} \varpi(a,k;b,l)\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\Gamma^{(a)}}{\Gamma}\right)^k \left(\frac{\Gamma^{(b)}}{\Gamma}\right)^l (\tfrac{1}{2}+it)\right] g(t)dt$$

$$-2\pi\mathrm{Re}\left\{(c_E - \log(2\pi))g(\tfrac{1}{2}i) + \tfrac{1}{2}ig'(\tfrac{1}{2}i)\right\},$$

$$\mathcal{Z}_{2,d}(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j H_j(\tfrac{1}{2})^3 \Lambda(\kappa_j; g),$$

$$\mathcal{Z}_{2,c}(g) = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\frac{1}{2}+ir)|^6}{|\zeta(1+2ir)|^2}\Lambda(r;g)dr,$$

$$\mathcal{Z}_{2,h}(g) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\vartheta(2k)} \alpha_{j,2k} H_{j,2k}(\tfrac{1}{2})^3 \Lambda((\tfrac{1}{2}-2k)i\,; g).$$

但し，$\varpi(a,k;b,l)$ は計算可能な常数であり，

$$g_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(xt)dt$$

として

$$\Lambda(r;g) = \mathrm{Re}\int_0^{\infty} y^{-\frac{1}{2}-ir}(y(1+y))^{-\frac{1}{2}} g_c(\log(1+1/y))\left(1+\frac{i}{\sinh(\pi r)}\right)$$

$$\times\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)^2}{\Gamma(1+2ir)} F(\tfrac{1}{2}+ir, \tfrac{1}{2}+ir; 1+2ir; -1/y)dy. \tag{37.2}$$

証明　分解式 (33.17)，(35.10)，(35.15)，(36.10) 及び補題 36.2 をまとめ，領域 $\mathcal{B}$ にて

$$\mathcal{J}_1(u,v,w,z;g) = \{\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_{3,c} + \mathcal{J}_{3,d}^{+} + \mathcal{J}_{3,d}^{-} + \mathcal{J}_{3,h}^{+}\}(u,v,w,z;g). \tag{37.3}$$

点 $P_{\frac{1}{2}}$ において $\mathcal{J}^{\pm}_{3,d}$ は正則である．実際，(u,v,w,z) が $P_{\frac{1}{2}}$ の充分近くにあるとき任意の $r\in\mathbb{R}$ に対して $(ir,u,v,w,z)\notin\mathcal{N}$ である故，(35.4)–(35.5) から $\Phi_{\pm}(ir;u,v,w,z;g)$ は正則である．同様に $\mathcal{J}^{+}_{3,h}$ も $P_{\frac{1}{2}}$ にて正則である．つまり，スペクトル分解式 (35.13)–(35.14) 及び (35.17) においてそのまま $(u,v,w,z)=P_{\frac{1}{2}}$ と特殊化してよく，

$$\begin{aligned}\{\mathcal{J}^{+}_{3,d}+\mathcal{J}^{-}_{3,d}+\mathcal{J}^{+}_{3,h}\}(P_{\frac{1}{2}};g)\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jH_j(\tfrac{1}{2})^3\{\Phi_{+}+\Phi_{-}\}(i\kappa_j;P_{\frac{1}{2}};g)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\vartheta(2k)}\alpha_{j,2k}H_{j,2k}(\tfrac{1}{2})^3\Xi(2k-\tfrac{1}{2};P_{\frac{1}{2}};g)\end{aligned}\tag{37.4}$$

を得る．但し，$H_j(\frac{1}{2})=0$ $(\epsilon_j=-1)$，$H_{j,2k+1}(\frac{1}{2})=0$ であることを用いた．これらは，各々函数等式 (32.7)，(32.14) からの帰結である．等式 (35.4)–(35.5) から $r\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\{\Phi_{+}+\Phi_{-}\}(ir;P_{\frac{1}{2}};g)&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{i}{\sinh(\pi r)}\right)\Xi(ir;P_{\frac{1}{2}};g)\\ &+\frac{1}{4}\left(1-\frac{i}{\sinh(\pi r)}\right)\Xi(-ir;P_{\frac{1}{2}};g).\end{aligned}\tag{37.5}$$

また，(36.3)–(36.4) から

$$\begin{aligned}\Xi(ir;P_{\frac{1}{2}};g)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)^2}{\Gamma(1+2ir)}\int_0^{\infty}y^{-\frac{1}{2}+ir}(1+y)^{-\frac{1}{2}}\hat{g}(\log(1+y))\\ \times F(\tfrac{1}{2}+ir,\tfrac{1}{2}+ir;1+2ir;-y)dy.\end{aligned}\tag{37.6}$$

従って，

$$\begin{aligned}\{\Phi_{+}+\Phi_{-}\}(ir;P_{\frac{1}{2}};g)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}y^{ir}(y(1+y))^{-\frac{1}{2}}\hat{g}(\log(1+y))\\ \times\left(1+\frac{i}{\sinh(\pi r)}\right)\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)^2}{\Gamma(1+2ir)}F(\tfrac{1}{2}+ir,\tfrac{1}{2}+ir;1+2ir;-y)dy.\end{aligned}\tag{37.7}$$

一方，整数 $k \geq 1$ に対して

$$\{\Phi_+ + \Phi_-\}(2k - \tfrac{1}{2}; P_{\frac{1}{2}}; g) = \Xi(2k - \tfrac{1}{2}; P_{\frac{1}{2}}; g) \tag{37.8}$$

であることは見やすい．

次に，$\mathcal{J}_{3,c}$ を点 $P_{\frac{1}{2}}$ の近傍にて考察する．等式 (36.10) に戻り，$\mathcal{J}_{3,c}^{(Q)}$ に含まれる積分路を虚軸に移動する．問題となる特異点は (36.9) に示されたものと $\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)$ である．何故ならば，因子 $S(\xi; u, v, w, z)$ の他の特異点は $-\frac{1}{2}$ の近傍にあるか，あるいは因子 $\cos(\frac{1}{2}\pi(u-v)) - \sin(\pi(\frac{1}{2}(z-w)+\xi))$ によって打ち消され，更に，補題 36.1 により $\Xi(\xi; u, v, w, z; g)$ は $\mathrm{Re}\,\xi \geq -\frac{1}{4}$ にて正則であるからである．極 $\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)$ に対応する部分を F_+ として，

$$\mathcal{J}_{3,c}^{(Q)}(u, v, w, z; g) = F_+(u, v, w, z; g) - U(u, v, w, z; g) + \mathcal{J}_{3,c}^*(u, v, w, z; g).$$

但し，U は (36.10) におけると同じであり，$\mathcal{J}_{3,c}^*$ は $\mathcal{J}_{3,c}$ と同一の表示をもつ．勿論，函数としては後の二者は互いに異なる．つまり，$P_{\frac{1}{2}}$ の近傍にて

$$\mathcal{J}_{3,c}(u, v, w, z; g) = \{F_+ + F_-\}(u, v, w, z; g) + \mathcal{J}_{3,c}^*(u, v, w, z; g). \tag{37.9}$$

函数 $\mathcal{J}_{3,c}^*$ は $P_{\frac{1}{2}}$ にて正則であり，

$$\mathcal{J}_{3,c}^*(P_{\frac{1}{2}}; g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^6}{|\zeta(1+2it)|^2}\{\Phi_+ + \Phi_-\}(it; P_{\frac{1}{2}}; g)dt. \tag{37.10}$$

補題 36.2 を背景にして (33.4)–(33.5)，(37.3)，(37.9) をまとめ，点 $P_{\frac{1}{2}}$ の近傍で

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u, v, w, z; g) &= \mathcal{M}(u, v, w, z; g) + \mathcal{J}_{3,c}^*(u, v, w, z; g) + \overline{\mathcal{J}_{3,c}^*(\overline{w}, \overline{z}, \overline{u}, \overline{v}; g)} \\ &\quad + \{\mathcal{J}_{3,d}^- + \mathcal{J}_{3,d}^+ + \mathcal{J}_{3,h}^+\}(u, v, w, z; g) \\ &\quad + \overline{\{\mathcal{J}_{3,d}^- + \mathcal{J}_{3,d}^+ + \mathcal{J}_{3,h}^+\}(\overline{w}, \overline{z}, \overline{u}, \overline{v}; g)}\end{aligned} \tag{37.11}$$

を得る．但し，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(u, v, w, z; g) &= \mathcal{J}_0(u, v, w, z; g) + \mathcal{J}_2(u, v, w, z; g) + \overline{\mathcal{J}_2(\overline{w}, \overline{z}, \overline{u}, \overline{v}; g)} \\ &\quad + \{F_+ + F_-\}(u, v, w, z; g) + \overline{\{F_+ + F_-\}(\overline{w}, \overline{z}, \overline{u}, \overline{v}; g)}.\end{aligned} \tag{37.12}$$

等式 (37.11) の各項は全て点 $P_{\frac{1}{2}}$ で正則である．実際，$\mathcal{M}$ 以外の項の正則性は既に上記で示されている故，$\mathcal{M}$ も正則である．

値 $\mathcal{M}(P_{\frac{1}{2}};g)$ を g を用いて表示しよう. 詳細を省くが, 留数計算にて $F_{\pm}$ を求め,

$$\mathcal{M}(u,v,w,z;g)=\sum_{j=0}^{12}\mathcal{M}_j(u,v,w,z;g).$$

但し,

$$\mathcal{M}_{6+j}(u,v,w,z;g)=\overline{\mathcal{M}_j(\overline{w},\overline{z},\overline{u},\overline{v};g)}\quad(1\le j\le 6),$$

$$\mathcal{M}_0(u,v,w,z)=\hat{g}(0)\zeta(u+w)\zeta(u+z)\zeta(v+w)\zeta(v+z)\{\zeta(u+v+w+z)\}^{-1},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(u,v,w,z)&=\tilde{g}(v+w-1,w)\zeta(u+z)\zeta(v+w-1)\\&\quad\times\zeta(z-w+1)\zeta(u-v+1)\{\zeta(u+z-v-w+2)\}^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2(u,v,w,z)&=\tilde{g}(u+w-1,w)\zeta(v+z)\zeta(u+w-1)\\&\quad\times\zeta(z-w+1)\zeta(v-u+1)\{\zeta(v+z-u-w+2)\}^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_3(u,v,w,z;g)&=(2\pi)^{w-z}\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))+\cos(\pi(z-w+\tfrac{1}{2}(u-v)))\}\\&\quad\times\zeta(u+z-1)\zeta(v+w)\zeta(z-w)\zeta(v-u+1)\\&\quad\times\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u+z-v-w))\zeta(2-u-z+v+w)\}^{-1}\\&\quad\times\Xi(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w-1);u,v,w,z;g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_4(u,v,w,z;g)&=(2\pi)^{w-z}\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))+\cos(\pi(z-w+\tfrac{1}{2}(v-u)))\}\\&\quad\times\zeta(v+z-1)\zeta(u+w)\zeta(z-w)\zeta(u-v+1)\\&\quad\times\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(v+z-u-w))\zeta(2-v-z+u+w)\}^{-1}\\&\quad\times\Xi(\tfrac{1}{2}(v+z-u-w-1);u,v,w,z;g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_5(u,v,w,z;g)&=-(2\pi)^{w-z}\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))-\cos(\pi(z+\tfrac{1}{2}(u+v)))\}\\&\quad\times\zeta(u+z-1)\zeta(2-v-w)\zeta(v+z-1)\zeta(2-u-w)\\&\quad\times\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u+v+w+z))\zeta(4-u-v-w-z)\}^{-1}\\&\quad\times\Xi(\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-3);u,v,w,z;g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_6(u,v,w,z;g)&=(2\pi)^{w-z}\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v))+\cos(\pi(w+\tfrac{1}{2}(u+v)))\}\\&\quad\times\zeta(u+z-1)\zeta(2-v-w)\zeta(v+z-1)\zeta(2-u-w)\\&\quad\times\{\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u+v+w+z))\zeta(4-u-v-w-z)\}^{-1}\end{aligned}$$

$$\times\ \Xi(-\tfrac{1}{2}(u+v+w+z-3);u,v,w,z;g)\,.$$

これらの内，$\mathcal{M}_0$ は $\mathcal{J}_0$ に等しく，$\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ は $\mathcal{J}_2$ であり，更に，$\mathcal{M}_j$ $(3\le j\le 6)$ は各々 (36.6) の積分の $\xi=\frac{1}{2}(u+z-v-w-1)$, $\frac{1}{2}(v+z-u-w-1)$, $\frac{1}{2}(u+v+w+z-3)$, $\frac{1}{2}(3-u-v-w-z)$ における留数からもたらされたものである．

函数 $\mathcal{M}$ は $P_{\frac{1}{2}}$ で正則である故，各 $\mathcal{M}_j$ を $P_{\frac{1}{2}}$ の近傍で Taylor 展開しその常数項を $\mathcal{M}_j^*$ とすれば

$$\mathcal{M}(P_{\frac{1}{2}};g)=\sum_{j=0}^{12}\mathcal{M}_j^*.$$

各 $\mathcal{M}_j^*$ を計算するために，$\underline{\delta}=(a_1,a_2,a_3,a_4)\delta=(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$ とおく．但し，$\delta\in\mathbb{C}$ は充分小であり，$a_1,\cdots,a_4$ は $\mathcal{M}_j(P_{\frac{1}{2}}+\underline{\delta})$ $(\delta\neq 0)$ がいずれも有限である様に定める．先ず，$\mathcal{M}_0$ の処理は容易である故，$\mathcal{M}_1$ から議論するが，(13.12) に注意して

$$\mathcal{M}_1(P_{\frac{1}{2}}+\underline{\delta})=\Gamma(\delta_2+\delta_3)\zeta(\delta_1+\delta_4+1)\zeta(\delta_4-\delta_3+1)\zeta(\delta_1-\delta_2+1)$$
$$\times\zeta(\delta_2+\delta_3)\{\zeta(2+\delta_1-\delta_2-\delta_3+\delta_4)\}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\delta_2-it)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\delta_3-it)}g(t)dt.$$

従って，適当な常数 $d(a,k;b,l)$ を用いて

$$\mathcal{M}_1^*=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\substack{a,b,k,l\ge 0\\ ak+bl\le 4}}d(a,k;b,l)\left(\frac{\Gamma^{(a)}}{\Gamma}\right)^k\left(\frac{\Gamma^{(b)}}{\Gamma}\right)^l(\tfrac{1}{2}-it)g(t)dt. \tag{37.13}$$

と書ける．次の $\mathcal{M}_3^*$ については多少慎重な議論を要する．定義 (35.3) により，$\mathcal{M}_3$ の Ξ-因子は

$$\Xi(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w-1);u,v,w,z;g)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(u+z-1-s)\Gamma(s+1-u-w)\tilde{g}(s,w)ds \tag{37.14}$$

に等しい．但し，積分路は $\Gamma(u+z-1-s)$, $\Gamma(s+1-u-w)\tilde{g}(s,w)$ の極を各々右，左に分離すべくとらねばならない．方向係数 a_1,a_2,a_3,a_4 の定め方から，こ

の様な曲線は描ける．表示 (13.12) を挿入し，絶対収束する二重積分を得，

$$\Xi(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w-1); u, v, w, z; g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{\Gamma(w-it)}$$
$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s)\Gamma(s+1-u-w)\Gamma(u+z-1-s)\Gamma(w-it-s)dsdt.$$

積分路の定め方により，Barnes 公式を援用でき，

$$\Xi(\tfrac{1}{2}(u+z-v-w-1); u, v, w, z; g)$$
$$= \Gamma(u+z-1)\Gamma(z-w)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-u-it)}{\Gamma(z-it)} g(t)dt.$$

これより，$\mathcal{M}_3^*$ もやはり (37.13) と同様に表示されることが解る．同じ議論を $\mathcal{M}_4$，$\mathcal{M}_5$ に適用できる故，これらの取扱いは省く．最後の $\mathcal{M}_6$ は他とはやや異なる．つまり，この項は $P_{\frac{1}{2}}$ で正則である．実際，因子

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi(u-v)) + \cos(\pi(w+\tfrac{1}{2}(u+v))) = 2\sin(\tfrac{1}{2}\pi(u+w-1))\sin(\tfrac{1}{2}\pi(v+w-1))$$

の零点は $\zeta(2-u-w)\zeta(2-v-w)$ の極を打ち消し，しかも $\mathcal{M}_6$ の Ξ-因子は $P_{\frac{1}{2}}$ において正則である．よって，

$$\mathcal{M}_6^* = -\tfrac{3}{4}\Xi(\tfrac{1}{2}; P_{\frac{1}{2}}; g).$$

表示 (13.12) と定義 (35.3) から

$$\Xi(\tfrac{1}{2}; P_{\frac{1}{2}}; g) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{\Gamma(\frac{1}{2}-it)}\int_{(\frac{1}{4})} \Gamma(s)^2\Gamma(-s)\Gamma(\tfrac{1}{2}-it-s)dsdt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(\tfrac{1}{2}-it)dt.$$

これは，(37.13) の形式に含まれる．以上，$\mathcal{M}$ についての議論と (37.4)，(37.7)–(37.8)，(37.10)–(37.11) をまとめ，定理 37.1 の証明を終る．

等式 (37.1) と (13.17) との比較を試みよう.「留数項」，つまり $\mathcal{Z}_{2,r}(g)$ と $\mathcal{Z}_{1,r}(g)$ とは明らかに g の同種の変換である．また，$\mathcal{Z}_{2,d}(g)$ と $\mathcal{Z}_{1,v}(g)$ も類似している．これらの係数 $H_j(\frac{1}{2})^3$，$d(n)$ は共に「算術的」な量であり，後者も (35.18) を参照し Hecke 作用素との関連がうかがえよう．更に，$\mathcal{Z}_{2,d}(g)$，$\mathcal{Z}_{1,v}(g)$ に含まれる函

数 $y^{-\frac{1}{2}-ir}F(\frac{1}{2}+ir,\frac{1}{2}+ir;1+2ir;-1/y)$，$\cos(2\pi ny)$ は各々対応する調和解析の解核と関係がある．一方，等式 (37.1) の $\mathcal{Z}_{2,c}(g)$，$\mathcal{Z}_{2,h}(g)$ に対応するものは (13.17) には存在しない．しかし，これらの項は実は応用上は無視でき，この差異は外見上の程のものではない．従って，(37.1) は (13.17) の自然な延長上にあるものと見なせよう．この事実は g を (14.1) にて特殊化し，漸近式に移ればより明らかとなる．即ち，条件

$$T^{\frac{1}{2}}(\log T)^{-D}\le G\le T(\log T)^{-1}\qquad (D\ge 0)$$

のもとに

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\pi}G}\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+i(T+t))|^4\exp(-(t/G)^2)dt\\&=\frac{\pi}{\sqrt{2T}}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jH_j(\tfrac{1}{2})^3\kappa_j^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\kappa_j\log\frac{\kappa_j}{4eT}\right)\exp(-\tfrac{1}{4}(G\kappa_j/T)^2)\\&\qquad\qquad+O((\log T)^{3D+9})\end{aligned}\tag{37.15}$$

が得られ，(14.13) との類似は明瞭である．

一方,「Explicit Formula」(4.7) あるいは (4.16) との類似も興味深い．複素零点と離散固有値，及び，自明な零点と正則尖点形式との間の対応が認められる．これらの対応は $\zeta(s)$ と $\zeta_\Gamma(s)$ との対応の延長線上にある故，$\mathcal{Z}_2(g)$ に付随した $\zeta_\Gamma(s)$ の拡張の如きものの存在を示唆しているのではなかろうか．更に Mellin 変換

$$Z_2(s)=\int_1^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4t^{-s}dt\qquad(\mathrm{Re}\,s>1)$$

を考察すると，$\zeta(s)$ と $\zeta_\Gamma(s)$ との関係をより強く暗示できる．函数 $Z_2(s)$ の $\mathbb{C}$ 全体への接続は，証明は略するが，定理 37.1 を用いて得ることができ次の通りである．

【定理 37.2】　函数 $Z_2(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型である．特に，半平面 $\mathrm{Re}\,s>0$ における特異点は，$s=1$ にて位数 5 の極，$s=\frac{1}{2}\pm i\kappa$ において位数 1 の極，$s=\frac{1}{2}\rho$ における極に限る．ここに，$\zeta_\Gamma(\frac{1}{2}+i\kappa)=0$，$\zeta(\rho)=0$ である．より詳しく，

極 $\frac{1}{2}+i\kappa$ の留数は

$$(\tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}\left(2^{-i\kappa}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-i\kappa))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\kappa))}\right)^3\Gamma(2i\kappa)\cosh(\pi\kappa)\sum_{\kappa_j=\kappa}\alpha_j H_j(\tfrac{1}{2})^3$$

である．Kuznetsov 跡公式より評価

$$\sum_{\kappa_j\le K}\alpha_j H_j(\tfrac{1}{2})^3 \gg K^2\log^3 K \tag{37.16}$$

が従う故，$Z_2(s)$ は垂直線 $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 上に無限に多くの極をもつ．

[附記] 本節については [12, pp. 171–219] を参照せよ．定理 37.1 が $M_2(T)$ ((11.1)) についてもたらす様々な結論については Ivić，Jutila，著者等の最近の論文を見よ．構造としては，定理 37.1 の意味するところは $\zeta(s)$ に特殊な事実ではない．例えば Dirichlet L-函数を含む

$$\mathcal{Z}(g,\chi)=\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^2 g(t)dt$$

等についても同様なスペクトル分解が成立する．但し，基礎となる群は Γ ではなく，この場合は指標 χ の法 q についての合同部分群 $\Gamma_0(q)$ である．あるいは，「Iwaniec の平均値問題」

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4|\sum_{n\le N}a_n n^{it}|^2 g(t)dt \qquad (a_n \text{ は任意})$$

について定理 37.1 と同様な結論を得ることもできる．これは

$$\mathcal{Z}_2(g,b/a)=\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4(b/a)^{it}g(t)dt$$

を考察するのと同じであるが，$\mathcal{Z}_2(g)=\mathcal{Z}_2(g,1)$ についての議論に自明でない変形を加える必要がある．

更に，(13.17)，(37.1) の「外挿」として，6 乗平均 $\mathcal{Z}_3(g)$ についてスペクトル分解に相当することは期待できるであろうか．詳細な理由は略すが，この問題は $SL(3,\mathbb{Z})$ に関係する何らかの幾何構造の中で解決可能と著者には映る．しかし，より高次の平均については，これらに相当する構造をどこに求めるべきかを考察することすら困難である．もっとも，$\zeta(s)$ の 8 乗平均に近接した，虚二次体 K の

ゼータ函数 $\zeta_K(s)$ の 4 乗平均

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|^4 g(t)dt$$

は K 上の Bianchi 群に関する Kuznetsov 型跡公式に還元可能である．

これらの拡張をも背景として，$\zeta(s)$ と Hecke L-函数との密接な関係を読みとれるが，この事実はどの様な全体的構図のなかで理解すべきことであろうか．函数 $\zeta(s)$ を 4 乗し積分すると，Δ のスペクトルが現われそれらの上に Hecke L-函数の積が連なり，全体として $\zeta(s)$ の表現に参加する．著者はここに予定調和を見る．

参考文献

[1] E. Bombieri. *Le Grand Crible dans la Théorie Analytique des Nombres*. Astérisque vol. **18**, Soc. Math. France, Paris, 1987/1974.

[2] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I. Interscience Publ. Inc., New York, 1953.

[3] D.A. Hejhal. *The Selberg Trace Formula for* PSL$(2,\mathbb{R})$. II. Lect. Notes in Math., vol. **1001**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[4] M.N. Huxley. *Area, Lattice Points, and Exponential Sums*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.

[5] A. Ivić. *The Riemann Zeta-Function*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[6] —. *Lectures on the Mean Values of the Riemann Zeta-Function*. Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. and Phys., vol. **82**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[7] А.А. Карацуба. *Основи Аналитической Теории Чисел*. НАУКА, Москва, 1975.

[8] N.N. Lebedev. *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, New York, 1972.

[9] H.L. Montgomery. *Topics in Multiplicative Number Theory*. Lect. Notes in Math., vol. **227**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[10] Y. Motohashi. *Sieve Methods and Prime Number Theory.* Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. and Phys., vol. **72**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[11] —. *Riemann–Siegel formula.* Ulam Chair Lectures, Colorado Univ., 1987.

[12] —. *Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[13] K. Pracher. *Primzahlverteilung.* Springer Verlag, Berlin, 1957.

[14] R.A. Rankin. *Modular Forms and Functions.* Cambridge University Press, 1977.

[15] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis.* Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.

[16] C.L. Siegel. *Topics in Complex Function Theory.* Vol. II. Wiley–Interscience, New York, 1971.

[17] E.C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Clarendon Press, Oxford, 1951.

[18] —. *Theory of Functions.* Clarendon Press, Oxford, 1968.

[19] И.М. Виноградов. *Метод Тригонометрических Сумм в Теории Чисел.* НАУКА, Москва, 1971.

[20] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge Univ. Press, London, 1944.

[21] E.T. Whittaker and G.N. Watson. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge Univ. Press, London, 1927.

索　　　引

著者略歴

本橋洋一（もとはし よういち）

1966年　京都大学理学部数学科卒業

現　在　日本大学理工学部数学科教授

　　　　理学博士

　　　　フィンランド科学アカデミー外国人会員

主　著　Sieve Methods and Prime Number Theory, Springer-Verlag, 1983.

　　　　Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function, Cambridge University Press, 1997.

共立講座 21世紀の数学

第21巻（全27巻）

リーマンゼータ函数と保型波動

1999年1月25日　初版1刷発行

2000年5月30日　初版2刷発行

検印廃止

NDC 412,413

ISBN 4-320-01573-8

著　者　本橋洋一　© 1999

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**

東京都文京区小日向4-6-19

電話　03-3947-2511（代表）

郵便番号　112-8700

振替口座　00110-2-57035

URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂

製　本　中條製本工場

社団法人

自然科学書協会

会員

Printed in Japan